

Ülesandeid iseseisvaks tööks: 2. komplekt 2003/2004 õ.-a.

Tähtaeg: 15. veebruar 2004

1. Kas mänguvälja mõõtmetega 10×10 ruutu saab katta
 - a) 4 ühikruudust koosnevate L -kujuliste kujunditega;
 - b) 4 ühikruudust koosnevate T -kujuliste kujunditega;
 - c) nii L - kui ka T -kujuliste kujunditega?
2. Kolmnurga kõikide nurkade siinused on ratsionaalarvud. Tõesta, et ka kõikide nurkade koosinused on ratsionaalarvud.
3. Näita, et seitsmest antud reaalarvust $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ saab alati valida sellised kaks arvu x_i ja x_j , $i \neq j$, et

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Antud on kolmnurk $A_0 B_0 C_0$. Kolmnurkade jada $(A_n B_n C_n)$ konstrueeritakse järgmiselt: kolmnurga $A_k B_k C_k$ külgedel $B_k C_k$, $C_k A_k$, $A_k B_k$ võetakse vastavalt punktid A_{k+1} , B_{k+1} , C_{k+1} nii, et

$$\frac{|A_{k+1} B_k|}{|A_{k+1} C_k|} = \frac{|B_{k+1} C_k|}{|B_{k+1} A_k|} = \frac{|C_{k+1} A_k|}{|C_{k+1} B_k|} = 2.$$

Tõesta, et

- a) kolmnurgad $A_k B_k C_k$ ja $A_{k+2} B_{k+2} C_{k+2}$ on sarnased;
 - b) kolmnurga $A_{k+3} B_{k+3} C_{k+3}$ tipud asuvad vastavalt lõikudel $A_k A_{k+1}$, $B_k B_{k+1}$, $C_k C_{k+1}$ ning jagavad need lõigud suhtes $2 : 1$, vaadates väiksema indeksiga punkti poolt.
5. Poolringjoonel otspunktidega A ja B võetakse punkt C . Olgu D selline punkt diameetril AB , et $CD \perp AB$. Ringjoon c puutub lõike AD ja DC ning poolringjoone kaart CA , ringjoon d puutub lõike DB ja CD ning poolringjoone kaart BC . Ringjoone c ja lõigu AD puutepunkt on E , ringjoone d ja lõigu DB puutepunkt on F . Tõesta, et $\angle ECF = \frac{\pi}{4}$.
 6. Leia kõik pidevad funktsioonid f , mis on määratud kõikidel reaalarvudel ning mille korral kehtib

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

7. Olgu a_1, a_2, \dots, a_n erinevad täisarvud. Tõesta, et polünoomi

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$$

ei saa esitada kahe täisarvuliste kordajatega polünoomi korrutisena.

8. Tahvlile on kirjutatud 101 täisarvu. Suvalised 100 neist saab jagada kaheks 50-arvuliseks grupiks nii, et arvude summad mõlemas grupis on võrdsed. Tõesta, et kõik arvud on võrdsed.