Ülesandeid iseseisvaks tööks: 1. komplekt 2003/2004 õ.-a.

Tähtaeg: 5. jaanuar 2004

Komplekt A (ülesanded vanema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AC on joonestatud nurgapoolitaja CD. Lõigu DC ristsirge läbi punkti D lõikab sirget AC punktis E. Tõesta, et $|EC| = 2|AD|$.

2. Kolmnurgas ABC jagavad tipust A tõmmatud kõrgus, nurgapoolitaja ning mediaan tipu A juures oleva sisenurga neljaks võrdseks osaks. Leia kolmnurga ABC nurkade suurused.

3. Tähistagu $\mathbb{Z}$ kõigi täisarvude hulka. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, mis rahuldavad tingimusi $f(0) = 1$ ning

$$f\big(f(n)\big) = f\big(f(n+2)+2\big) = n$$

mistahes $n \in \mathbb{Z}$ korral.

4. Tähistagu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulka. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis mistahes $x,\, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldavad tingimust

$$f\big((x-y)^2\big) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2 \ .$$

5. Ritta kirjutatakse 1000 täisarvu. Selle alla lisatakse teine rida, kirjutades esimese rea iga arvu a kohale arvu $f(a)$, mis on võrdne arvu a esinemiste arvuga esimeses reas. Samal viisil lisatakse kolmas rida (teise rea iga arvu b alla kirjutatakse arv $g(b)$, mis on võrdne arvu b esinemiste arvuga teises reas) jne. Tõesta, et lõpliku arvu sammude järel tekib rida, mis on eelmise reaga võrdne.

6. Suurusega $n \times n$ mänguvälja ühele nurgaruudule asetatakse nupp. Kaks mängijat hakkavad kordamööda tegema käike: oma käigul nihutab mängija nuppu ühe ruudu võrra horisontaalselt või vertikaalselt edasi, kuid ainult sellisele ruudule, kus nupp veel käinud pole. Kaotab mängija, kes ei saa enam käiku teha. Kummal mängijal on võitev strateegia?

7. Olgu m ja n sellised positiivsed täisarvud, et $2002m^2 + m = 2003n^2 + n$. Tõesta, et $m - n$ on täisruut.

8. Olgu $L(n)$ vähim naturaalarv, mis jagub kõigi arvudega $2, 3, \ldots, n$. Leia kõik sellised algarvude paarid (p, q), kus $q = p + 2$ ja $L(q) > qL(p)$.

Komplekt B (ülesanded noorema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. On antud ringjoon S ning punktid A ja B väljaspool seda. Läbi punkti A tõmmatakse suvaline sirge l, mis lõikab ringjoont S punktides M ja N. Tõesta, et kõigi nii tekkivate kolmnurkade BMN ümberringjooned omavad veel ühte ühist punkti peale puntki B.

2. Kõõlnelinurga $ABCD$ ümberringjoonele on punktides B ja D tõmmatud puutujad, kusjuures nende puutujate lõikepunkt asub sirgel AC. Tõesta, et $|AB|\cdot|CD| = |BC|\cdot|AD|$.

3. Tõesta, et $a^4 + b^4 \geqslant 2ab^3$, kui $a \geqslant b \geqslant 0$.

4. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_1^2 = 2x_2 - 1 \\ x_2^2 = 2x_3 - 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{2002}^2 = 2x_{2003} - 1 \\ x_{2003}^2 = 2x_1 - 1 \end{cases} .$$

5. Härra Digitaal soovib oma lapsele õpetada viiekohaliste arvude lugemist. Selleks valmistab ta kaardid ning kirjutab igaühele ühe viiekohalise arvu. Kirjutamisel kasutab ta harilikku taskuarvutite kirjaviisi: kui kaarti pöörata 180 kraadi võrra, siis numbrid 0, 1, 2, 5, 8 ei muutu, number 6 läheb numbriks 9 ja vastupidi. Vähemalt mitu kaarti peab härra Digitaal valmistama, et ta saaks oma lapsele näidata kõiki viiekohalisi arve?

6. Watu riigi autonumbrites tohib kasutada ainult tähti W, A, T ja U. Seejuures peavad kõik tähed W esinema enne kõiki tähti A. Näiteks WATA on lubatud numbrimärk, kuid WATW ei ole. Watu riigis on ühtekokku miljon autot. Vähemalt kui palju tähti peab autonumber sisaldama, et neile kõigile numbreid jätkuks?

7. Olgu p ja q sellised algarvud, et ka $p+q$ ja $p-q$ on algarvud. Tõesta, et siis $p^2 - q$ on samuti algarv.

8. Olgu n positiivne täisarv, kusjuures $n \neq 2$, $n \neq 5$, $n \neq 13$. Tõesta, et arvude 2, 5, 13 ja n seast saab valida kaks arvu a ja b selliselt, et $ab - 1$ ei ole täisruut.