Ülesandeid iseseisvaks tööks: 1. komplekt 2003/2004 õ.-a.

Vastused ja lahendused

Komplekt A (ülesanded vanema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AC on joonestatud nurgapoolitaja CD. Lõigu DC ristsirge läbi punkti D lõikab sirget AC punktis E. Tõesta, et $|EC| = 2|AD|$.

   Lahendus. Olgu F sirgete DE ja BC lõikepunkt ning olgu K lõigu EC keskpunkt. Et kolmnurgas ECF on lõik CD nii kõrguseks kui ka nurgapoolitajaks, on kolmnurk ECF võrdhaarne ning $|ED| = |DF|$. Seega on lõik DK kolmnurga ECF kesklõik ning $DK \parallel CF$. Järelikult on kolmnurgad ADK ning ABC sarnased ning $|AD| = |DK|$. Kolmnurga CDE täisnurga tipust tõmmatud mediaan DK on kaks korda lühem hüpotenuusist EC. Seega on $|AD| = |DK| = \dfrac{EC}{2}$ ehk $|EC| = 2|AD|$.

2. Kolmnurgas ABC jagavad tipust A tõmmatud kõrgus, nurgapoolitaja ning mediaan tipu A juures oleva sisenurga neljaks võrdseks osaks. Leia kolmnurga ABC nurkade suurused.

   Vastus: $\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}$ ja $\dfrac{\pi}{2}$.
   Lahendus. Olgu A_H, A_I ning A' vastavalt tipust A tõmmatud kõrguse, nurgapoolitaja ning mediaani aluspunktid küljel BC. Olgu O kolmnurga ümberringjoone keskpunkt. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\angle B \geqslant \angle C$.
   Kuna $\angle BAA_H = \dfrac{\pi}{2} - \angle B = \angle CAO$ ning ülesande tingimuste põhjal $\angle BAA_H = \angle CAA'$, on seega $\angle CAO = \angle CAA'$. Viimane võrdus saab kehtida vaid siis, kui A, A' ja O asuvad ühel sirgel, ehk kui ABC on võrdhaarne alusega BC või punktid O ja A' langevad kokku. Et esimene tingimus ei saa olla täidetud, asub kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt lõigu BC keskpunktis, s.t. $\angle A = 90^\circ$. Nüüd saame, et $\dfrac{\pi}{2} - \angle B = \angle BAA_H = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\pi}{2}$, millest $\angle B = \dfrac{3\pi}{8}$ ning $\angle C = \pi - (\angle A + \angle B) = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{\pi}{8}$.

   Seega on kolmnurga ABC nurgad $\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}$ ja $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Tähistagu $\mathbb{Z}$ kõigi täisarvude hulka. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, mis rahuldavad tingimusi $f(0) = 1$ ning

   $$f\big(f(n)\big) = f\big(f(n+2) + 2\big) = n$$

   mistahes $n \in \mathbb{Z}$ korral.

   Vastus: $f(n) = 1 - n$ on ainus selline funktsioon.
   Lahendus. Funktsioon f on üksühene: kui $f(n) = f(m)$, siis $n = f\big(f(n)\big) = f\big(f(m)\big) = m$. Tingimusest $f(0) = 1$ leiame $f(1) = f\big(f(0)\big) = 0$. Tingimusest $f\big(f(n+2)+2\big) = f\big(f(n)\big)$ ja üksühesusest saame, et $f(n+2) + 2 = f(n)$, ehk $f(n+2) = f(n) - 2$.
   Näitame induktsiooniga, et $f(n) = 1 - n$ iga täisarvu n korral. Eespool näitasime, et see on nii $n = 0$ ja $n = 1$ korral. Oletame nüüd, et see võrdus kehtib iga $0 \leqslant n \leqslant k$ korral, kus $k \geqslant 1$. Siis

   $$f(k+1) = f(k-1) - 2 = \big(1 - (k-1)\big) - 2 = -k = 1 - (k+1)\ ,$$

   s.t. võrdus kehtib kõigi mittenegatiivsete täisarvude n korral. Olgu lõpuks $n < 0$, siis $1 - n > 1$ ja vastavalt juba tõestatule $f(1-n) = 1 - (1-n) = n$. Siis aga $f(n) = f\big(f(1-n)\big) = 1 - n$, s.t. võrdus kehtib ka kõigi negatiivsete täisarvude n korral.

4. Tähistagu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulka. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldavad tingimust

   $$f\big((x-y)^2\big) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2\ .$$

Vastus: $f(x) = x$ ja $f(x) = x + 1$.
Lahendus. Võttes antud võrduses vastavalt $y = 0$ ja $x = 0$, saame

$$f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(0) \tag{1}$$

ning

$$f(y^2) = f(0)^2 + y^2 \; . \tag{2}$$

Võttes $y = 0$ võrduses (2), saame $f(0)^2 = f(0)$, s.t. $f(0) = 0$ või $f(0) = 1$.
Võttes nüüd esialgses võrduses $x = y$, saame

$$f(0) = f(x)^2 - 2xf(x) + x^2 = \big(x - f(x)\big)^2 \; .$$

Kui $f(0) = 0$, siis saame siit, et $f(x) = x$ iga x korral. Kui $f(0) = 1$, siis $|f(x) - x| = 1$ iga x korral, s.t. $f(x) = x + 1$ või $f(x) = x - 1$. Oletame, et $f(a) = a - 1$ mingi reaalarvu a korral. Võrdustest (1) ja (2) saame siis, et

$$1 + a^2 = f(a^2) = f(a)^2 - 2a = (a-1)^2 - 2a = 1 + a^2 - 4a \; .$$

Siit $a = 0$, mis ei ole võimalik, sest $f(0) = 1 = 0 + 1$. Seega sel juhul $f(x) = x + 1$ iga x korral.
Lihtne kontroll näitab, et funktsioonid $f(x) = x$ ja $f(x) = x + 1$ mõlemad tõepoolest rahuldavad ülesande tingimust.

5. Ritta kirjutatakse 1000 täisarvu. Selle alla lisatakse teine rida, kirjutades esimese rea iga arvu a kohale arvu $f(a)$, mis on võrdne arvu a esinemiste arvuga esimeses reas. Samal viisil lisatakse kolmas rida (teise rea iga arvu b alla kirjutatakse arv $g(b)$, mis on võrdne arvu b esinemiste arvuga teises reas) jne. Tõesta, et lõpliku arvu sammude järel tekib rida, mis on eelmise reaga võrdne.

   Lahendus. Vaatleme arve mingis veerus. Alates teisest arvust selles veerus on selle veeru arvud kasvavad (miks?). Sellest tuleneb, et $(i + 1)$. rea arvude summa on mitte väiksem kui i. rea arvude summa. Üheski reas ei saa seejuures esineda suuremaid arve kui 1000. Kui oletame, et iga rida erineb eelmisest reast, siis peaks uue rea arvude summa olema suurem eelmise rea arvude summast. Samas ei saa see summa muutuda suuremaks kui $1000 \cdot 1000$ — vastuolu. Seega leidub rida, mis on võrdne eelmise reaga.

6. Suurusega $n \times n$ mänguvälja ühele nurgaruudule asetatakse nupp. Kaks mängijat hakkavad kordamööda tegema käike: oma käigul nihutab mängija nuppu ühe ruudu võrra horisontaalselt või vertikaalselt edasi, kuid ainult sellisele ruudule, kus nupp veel käinud pole. Kaotab mängija, kes ei saa enam käiku teha. Kummal mängijal on võitev strateegia?

   Vastus: paaris n korral alustajal, paaritu n korral tema vastasel.
   Lahendus. Olgu alustaja A ja tema vastane B. Paaris n korral saame jaotada ruudu 2×1 ristkülikuteks nii, et A esimene käik toimub sama 2×1 ristküliku ühelt ruudult teisele. Edasi on alati, kui B on käinud mingi 2×1 ristküliku ühele ruudule, mängijal A võimalik käia sellesama 2×1 ristküliku teisele ruudule. Seega A võidab. Paaritu n korral saame mängulaua, kust on välja lõigatud nurgaruut, jaotada 2×1 ristkülikuteks. Seega paaritu n korral on samasugune strateegia olemas mängijal B.

7. Olgu m ja n sellised positiivsed täisarvud, et $2002m^2 + m = 2003n^2 + n$. Tõesta, et $m - n$ on täisruut.

   Lahendus. Teisendades antud võrdust saame $n^2 = (m - n)(2002m + 2002n + 1)$. Olgu p arvude $m - n$ ja $2002m + 2002n + 1$ ühine algtegur, siis p jagab ka arvu $2002m + 2002n + 1 - 2002(m - n) = 4004n + 1$. Et p on ühtlasi arvu n^2 ja järelikult ka arvu n tegur, siis p jagab arvu 1 — vastuolu. Järelikult on $m - n$ ja $2002m + 2002n + 1$ ühistegurita, ehk nad mõlemad on täisruudud.

8. Olgu $L(n)$ vähim naturaalarv, mis jagub kõigi arvudega $2, 3, \ldots, n$. Leia kõik sellised algarvude paarid (p, q), kus $q = p + 2$ ja $L(q) > qL(p)$.

   Vastus: $p = 3$, $q = 5$.

Kuna $q = p+2$ ja $L(q) > qL(p)$, siis $L(p)$ ei jagu $(p+1)$-ga. Kui $p+1$ ei oleks algarvu aste, siis esituks ta kahe p-st mitte suurema ühistegurita arvu korrutisena, mille mõlemaga peaks jaguma ka $L(p)$, mistõttu $p+1$ peaks sel juhul olema $L(p)$ jagaja. Olgu nüüd $p+1 = r^n$, kus r on mingi algarv. Siis $r-1$ on algarvu p jagaja, kust $r = 2$ või $n = 1$. Juht $n = 1$ viib vastuolule, sest siis oleksid p, $p+1$ ja $p+2$ kolm järjestikust algarvu, mis pole võimalik. Seega $r = 2$ ning $p = 2^n - 1$, $q = 2^n + 1$. Kuid paaritu n korral $2^n + 1 \equiv 0 \pmod 3$ ning paaris n korral $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Jäävad võimalused $n = 1$ ja $n = 2$. Näeme, et $n = 1$ ei sobi, sest siis $p = 1$ pole algarv. Kui $n = 2$, siis saame $p = 3$, $q = 5$. Kontroll näitab, et need arvud sobivad.

Komplekt B (ülesanded noorema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. On antud ringjoon S ning punktid A ja B väljaspool seda. Läbi punkti A tõmmatakse suvaline sirge l, mis lõikab ringjoont S punktides M ja N. Tõesta, et kõigi nii tekkivate kolmnurkade BMN ümberringjooned omavad veel ühte ühist punkti peale punkti B.

   Lahendus. Lõigaku punkti A läbiv sirge l_1 ringjoont S punktides M_1 ja N_1. Lõigaku sirge AB kolmnurga BM_1N_1 ümberringjoont punktis C_1. Kuna punktid M_1, N_1, B ja C_1 asuvad ühel ringjoonel, kehtib võrdus $|AM_1| \cdot |AN_1| = |AC_1| \cdot |AB|$. Võtame nüüd analoogiliselt teise sirge l_2 ning vastavad punktid M_2, N_2 ja C_2. Analoogiliselt eelnenuga saame $|AM_2| \cdot |AN_2| = |AC_2| \cdot |AB|$. Kuna aga punktid M_1, N_1, M_2 ja N_2 asuvad ühel ringjoonel, saame $|AM_1| \cdot |AN_1| = |AM_2| \cdot |AN_2|$. Seega $|AC_1| = |AC_2|$, mistõttu $C_1 = C_2$ ja järelikult jääb punkt C_1 sirge l liigutamisel paigale.

   Märkus. Me ei näidanud siin, et leitud punkt C_1 on erinev punktist B. Tegelikult ei tarvitsegi see nii olla — kui mingi sirge l korral on sirge AB kolmnurga BMN ümberringjoone puutuja, siis on see nii iga vaadeldava sirge l korral, s.t. kõikvõimalike tekkivate kolmnurkade BMN ümberringjoontel on punktis B ühine puutuja.

2. Kõõlnelinurga $ABCD$ ümberringjoonele on punktides B ja D tõmmatud puutujad, kusjuures nende puutujate lõikepunkt asub sirgel AC. Tõesta, et $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$.

   Lahendus. Olgu kõnealuste puutujate lõikepunkt K. Siis on kolmnurgad ABK ja BCK sarnased ning $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|BK|}$. Analoogiliselt $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AK|}{|DK|} = \frac{|AK|}{|BK|}$, mistõttu $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|CD|}$ ning $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$.

3. Tõesta, et $a^4 + b^4 \geqslant 2ab^3$, kui $a \geqslant b \geqslant 0$.

   Lahendus. Võrratusest $(a^2 - b^2)^2 \geqslant 0$ saame $a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2$, ning eelduse tõttu $2a^2b^2 \geqslant 2ab^3$.

4. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_1^2 = 2x_2 - 1 \\ x_2^2 = 2x_3 - 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_{2002}^2 = 2x_{2003} - 1 \\ x_{2003}^2 = 2x_1 - 1 \end{cases}.$$

   Vastus: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2003} = 1$.
   Lahendus. Liites võrrandite vastavad pooled, saame $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + \ldots + (x_{2003}-1)^2 = 0$, mis reaalarvu ruudu mittenegatiivsuse tõttu on võimalik ainult juhul, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2003} = 1$.

5. Härra Digitaal soovib oma lapsele õpetada viiekohaliste arvude lugemist. Selleks valmistab ta kaardid ning kirjutab igaühele ühe viiekohalise arvu. Kirjutamisel kasutab ta harilikku taskuarvutite kirjaviisi: kui kaarti pöörata 180 kraadi võrra, siis numbrid 0, 1, 2, 5, 8 ei muutu, number 6 läheb numbriks 9 ja vastupidi. Vähemalt mitu kaarti peab härra Digitaal valmistama, et ta saaks oma lapsele näidata kõiki viiekohalisi arve?

   Vastus: 83931.
   Lahendus. Viiekohalised on arvud 10000 kuni 99999, neid on üldse 90000 tükki. Ümberpööramisel teisenevad mingiks viiekohaliseks arvuks ainult need arvud, mis sisaldavad ainult numbreid 0, 1, 2, 5, 8, 6, 9 ja mis ei lõpe nulliga. Viiekohalise arvu esimese ja viimase numbri võib seega valida 6 kandidaadi seast, ülejäänud numbrid aga 7 kandidaadi seast. Kokku on niisuguseid arve $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 12348$.

Nendest arvudest osa teiseneb aga iseendaks. Sellistel arvudel peab olema kuju $\overline{xyzyx}$. Numbriks x sobivad ülaltoodud “pööratavatest” numbritest kõik peale nulli, numbriks y kõik seitse numbrit ning numbriks z kõik peale 6 ja 9. Seega on x kohale 6 kandidaati, y kohale 7 kandidaati ja z kohale 5 kandidaati. Arve, mis ümberpööramisel teisenevad iseendaks, on niisiis $6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$.

Seega saab $12348 - 210 = 12138$ arvu esitada kahekaupa ühe kaardiga, ülejäänud $90000 - 12138 = 77862$ arvu jaoks on vaja igaühele omaette kaarti. Kaarte läheb niisiis kokku vaja $12138 : 2 + 77862 = 83931$.

6. Watu riigi autonumbrites tohib kasutada ainult tähti W, A, T ja U. Seejuures peavad kõik tähed W esinema enne kõiki tähti A. Näiteks WATA on lubatud numbrimärk, kuid WATW ei ole. Watu riigis on ühtekokku miljon autot. Vähemalt kui palju tähti peab autonumber sisaldama, et neile kõigile numbreid jätkuks?

   Vastus: 12.

   Lahendus. Vaatleme Watu autonumbreid pikkusega n, olgu nende arv a_n. Jagame numbrid nelja klassi: W-ga algavad, A-ga algavad, T-ga algavad ja U-ga algavad. Esimeses, kolmandas ja neljandas klassis on igaühes a_{n-1} numbrit, sest igas klassis jäävad pärast esimese tähe kusutamist järele kõik lubatavad autonumbrid pikkusega $n-1$. Teise klassi numbritest esimese tähe A kustutamisel saame parajasti kõik pikkusega $n-1$ autonumbrid, mis ei sisalda tähte W. Neid numbreid on kokku 3^{n-1}, sest niipalju on võimalusi täita $n-1$ positsiooni ainult tähtede A, T ja U abil. Järelikult avaldub n-sümboliliste autonumbrite arv a_n kujul

   $$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}.$$

   Seejuures $a_1 = 4$.

   Nüüd on lihtne järk-järgult leida autonumbri otsitavat pikkust:

n	a_n
1	4
2	15
3	54
4	189
5	648
6	2187
7	7290
8	24057
9	78732
10	255879
11	826686
12	2657205

   Autonumber peab sisaldama seega vähemalt 12 tähte.

   Märkus. Võib kontrollida, et ülesande tingimusi rahuldab jada $a_n = 3^{n-1}(n+3)$.

7. Olgu p ja q sellised algarvud, et ka $p+q$ ja $p-q$ on algarvud. Tõesta, et siis $p^2 - q$ on samuti algarv.

   Lahendus. Algarvud p ja q ei saa olla mõlemad paaritud, sest siis on $p + q > 2$ paarisarv. Seega, kuna $p > q$, siis $q = 2$. Täpselt üks algarvudest p, $p-2$ ja $p+2$ jagub 3-ga ja seega võrdub 3-ga. Ainuke sobiv võimalus on $p = 5$, mille korral tõesti ka $p^2 - q = 23$ on algarv.

8. Olgu n positiivne täisarv, kusjuures $n \neq 2$, $n \neq 5$, $n \neq 13$. Tõesta, et arvude 2, 5, 13 ja n seast saab valida kaks arvu a ja b selliselt, et $ab - 1$ ei ole täisruut.

   Lahendus. Ilmselt peame valima arvu n ja ühe arvudest 2, 5 ja 13 (sest $2 \cdot 5 - 1 = 9$, $2 \cdot 13 - 1 = 25$ ja $5 \cdot 13 - 1 = 64$ on kõik täisruudud). Oletame vastuväiteliselt, et mingi positiivse täisarvu n korral on arvud $2n-1$, $5n-1$ ja $13n-1$ kõik täisruudud. Et paaritu täisruut annab 8-ga jagamisel alati jäägi 1, siis $2n-1 \equiv 1 \pmod 8$, millest $2n \equiv 2 \pmod 8$ ja $n \equiv 1 \pmod 4$. Asendades $n = 4k+1$ teise ja kolmandasse avaldisse, saame, et arvud $5(4k+1) - 1 = 4(5k+1)$ ja $13(4k+1) - 1 = 4(13k+3)$ on täisruudud. Seega ka arvud $5k+1$ ja $13k+3$ peavad olema täisruudud. Paneme tähele, et $(13k+3) - (5k+1) = 8k+2 \equiv 2 \pmod 4$. Ent täisruut on alati kongruentne 0 või 1-ga mooduli 4 järgi ja seega saab kahe täisruudu vahe anda 4-ga jagades vaid jäägi 0, 1 või 3, vastuolu.