Ülesandeid iseseisvaks tööks: 1. komplekt 2002/2003 õ.-a.

Tähtaeg: 3. jaanuar 2003

Komplekt A (ülesanded vanema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Tõesta, et iga kumera hulknurga H saab katta kolme hulknurgaga H sarnase, kuid väiksema hulknurgaga.

2. Läbipaistmatule kerakujulisele planeedile raadiusega R tahetakse paigutada 8 jälgimisjaama nii, et iga planeedile lähenev objekt oleks hetkel, mil ta jõuab planeedi pinnast kaugusele R, nähtav vähemalt kahest jaamast. Kas ja kuidas on seda võimalik teha?

3. Kas leidub selline mittekonstantne aritmeetiline jada, mille iga liige on mingi naturaalarvu aste ühest suurema naturaalarvulise astendajaga?

4. Olgu $a_n = F_n^n$, kus $\{F_n\}$ on Fibonacci jada: $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, kui $n \geqslant 3$. Tähistame

   $$b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}}\,.$$

   Kas jada $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ on tõkestatud (s.t. kas leidub selline arv M, et $b_k < M$ iga indeksi k korral)?

5. Olgu $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC}$ paarikaupa ristuvad ühikvektorid kolmemõõtmelises ruumis. Olgu ω tasand, mis sisaldab punkti O, ning A', B' ja C' punktide A, B ja C ristprojektsioonid tasandile ω. Leia avaldise $OA'^2 + OB'^2 + OC'^2$ kõigi võimalike väärtuste hulk, kui tasandi ω asendit varieerida.

6. Olgu A, B, C, D punktid ruumis ning olgu M lõigu AC keskpunkt ja N lõigu BD keskpunkt. Tõesta, et

   $$4|MN|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2\,.$$

7. Olgu p algarv ja k täisarv, $0 \leqslant k < p$. Tõesta, et

   $$k!(p-1-k)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod{p}\,.$$

8. Arvuga m ühistegurita täisarvu x *järguks* $\mathrm{ord}_m x$ nimetame vähimat positiivset täisarvu n, mille korral x^n annab m-ga jagades jäägi 1.

   Olgu m positiivne täisarv ning a, b sellised m-ga ühistegurita täisarvud, et

   $$\mathrm{ord}_m ab \neq \text{VÜK}\,(\mathrm{ord}_m a, \mathrm{ord}_m b)\,.$$

   Tõesta, et leidub algarv, mis esineb arvude $\mathrm{ord}_m a$ ja $\mathrm{ord}_m b$ kanoonilises esituses samal positiivsel astmel.

Komplekt B (ülesanded noorema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Kolmnurga siseringjoonele raadiusega r on tõmmatud kolmnurga külgedega paralleelsed puutujad, mis eraldavad kolmnurgast kolm väikest kolmnurka. Tõesta, et nende kolme kolmnurga siseringjoonte raadiuste summa on r.

2. Punkti A läbivad kaks ringjoont raadiustega p ja q. Sirge BC puutub ühte neist ringjoontest punktis B ja teist punktis C (punktid B ja C on erinevad punktist A). Avalda kolmnurga ABC ümberringjoone raadius R suuruste p ja q kaudu.

3. Lahenda võrrand täisarvudes:
   a) $y^2 = 5x^2 + 6$;
   b) $2^x - 1 = y^2$.

4. Olgu a, k, m sellised positiivsed täisarvud, et arv $a-1$ jagub arvuga k^m. Tõesta, et arv $a^k - 1$ jagub arvuga k^{m+1}.

5. Tasandil on märgitud 101 punkti, mis kõik ei asetse ühel sirgel. Läbi iga märgitud punktide paari tõmmatakse sirge. Tõesta, et märgitud punktide seas leidub punkt, mida läbib vähemalt 11 sirget.

6. Laual on 2003 münti, millest mõnedel on "kirja" ja ülejäänutel "kulli" külg ülalpool. Laua juurde astuvad järjekorras 2003 mustkunstnikku ja pööravad münte ümber järgmiselt: esimene neist valib mingi ühe mündi ja pöörab selle ümber, teine valib mingid kaks münti ja pöörab need ümber jne. kuni viimane, 2003. mustkunstnik pöörab ümber kõik mündid. Tõesta, et:
   a) müntide mistahes algseisu korral on mustkunstnikel võimalik valida ümberpööratavad mündid nii, et lõpuks oleks kõigil müntidel ülalpool üks ja sama külg;
   b) etteantud algseis määrab üheselt selle, kas lõpuks on kõigil müntidel ülalpool "kirja" või "kulli" külg.

7. Lahenda võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}.$$

8. Lahenda võrrandisüsteem x, y, z suhtes:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}.$$