Ülesandeid iseseisvaks tööks: 1. komplekt 2002/2003 õ.-a.

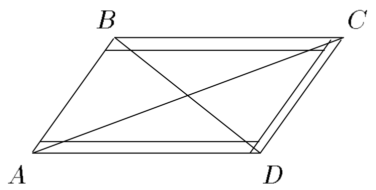
Ülesannete lahendused

Komplekt A (ülesanded vanema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Tõesta, et iga kumera hulknurga H saab katta kolme hulknurgaga H sarnase, kuid väiksema hulknurgaga.

   Lahendus. Õppesessioonil näitasime, et iga kumera hulknurga, mis ei ole rööpkülik, saab katta kolme antud hulknurgaga sarnase, kuid väiksema hulknurgaga. (Kuidas seda teha?) Seega tuleb ülesande väide tõestada veel rööpkülikute jaoks.

   Olgu antud rööpkülik $ABCD$ ja olgu üldisust kitsendamata $|AB| \leqslant |BC|$ ning $|BD| \leqslant |AC|$. Muuhulgas on siis lihtne näha, et $|AB| = |CD| < |AC|$. Teeme rööpkülikuga $ABCD$ kaks homoteetset teisendust vastavalt keskpunktidega A ja B, mõlemad kordajaga $k < 1$. Kui kordajat k suurendada (kuid nii, et ta jääb endiselt arvust 1 väiksemaks), katavad kaks saadavat rööpkülikut algse rööpküliku peaaegu täielikult ära. Katmata jääb kitsas rööpkülik servaga CD ning selle saab katta kolmanda rööpkülikuga $ABCD$ sarnase, kuid väiksema rööpkülikuga, sest $|CD| < |AC|$ (vt. joonist 1).



Joonis 1

2. Läbipaistmatule kerakujulisele planeedile raadiusega R tahetakse paigutada 8 jälgimisjaama nii, et iga planeedile lähenev objekt oleks hetkel, mil ta jõuab planeedi pinnast kaugusele $2R$, nähtav vähemalt kahest jaamast. Kas ja kuidas on seda võimalik teha?

   Vastus: nõutud paigutus on võimalik.

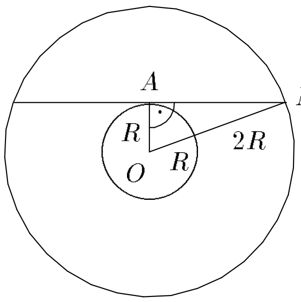
   Lahendus. Jaamad võib panna planeedi kera sisse kujundatud kuubi tippudesse (see on tegelikult ka ainus võimalus, kuid selle tõestamist ülesandes ei nõuta).

   Leiame, millised kera pinnast diameetri kaugusel asuvad punktid on nähtavad kera pinna punktist A. Kõik punktid, mis asuvad kera pinnast diameetri kaugusel, moodustavad sfääri raadiusega $3R$. Neist punktidest on punktist A näha parajasti niisugused, mille lõikab sellest sfäärist ära punktis A kera puudutav tasand. Vaadeldes punktist A näha olevate sfääri punktide hulga tsentraalprojektsiooni kera pinnale (kera keskpunkti suhtes), saame kera pinna punktide hulga, mida piirab teatav ringjoon. Ülesanne on lahendatud, kui näitame, et kaheksa sellise punktihulgaga saab kera pinna kaks korda üle katta.

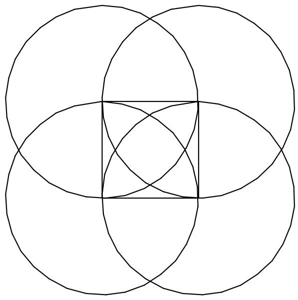
   Olgu kera ning eespool mainitud raadiusega $3R$ sfääri ühine keskpunkt O ning olgu M mingi punkt sfääri ja punktis A kera puudutava tasandi lõikejooneks oleval ringjoonel (vt. joonist 2). Leiame sellist punktihulka piirava ringjoone nurkraadiuse (kus nurga tipp on kera keskpunktis) kolmnurgast OAM. Saame

$$\cos \angle AOM = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}\,.$$

   Seega on otsitav nurkraadius $\arccos \frac{1}{3}$. Teisest küljest näitab lihtne arvutus , et kuubi kaht naabertippu kuubi keskpunktiga ühendavate lõikude vaheline nurk on samuti $\arccos \frac{1}{3}$ (tee see arvutus läbi!), seega kera sisse kujundatud kuubi tippudele vastavad ülalkirjeldatud viisil konstrueeritud punktihulgad katavad kera pinna tõepoolest kahekordselt (vt. joonist 3).



Joonis 2



Joonis 3

Märkus. Kodutöös esitatud ülesande tekstis oli eksikombel vaadeldavate objektide kaugusena planeedi pinnast antud $2R$ asemel R. Sel juhul ei ole võimalik jaamu nõutud viisil paigutada, sest $\arccos\dfrac{1}{2} < \arccos\dfrac{1}{3}$ ning ühest punktist vaadeldavate kera pinnast kaugusel R asetsevate punktide hulga tsentraalprojektsioon kera pinnale on seega väiksem samast punktist vaadeldavate kaugusel $2R$ punktide hulga tsentraalprojektsioonist kera pinnale (et see tõestus rangelt lõpule viia, oleks meil veel vaja näidata, et ülaltoodud lahenduses vaadeldav jaamade paigutus kauguse $2R$ korral on tõepoolest ainuvõimalik).

3. Kas leidub selline mittekonstantne aritmeetiline jada, mille iga liige on mingi naturaalarvu aste ühest suurema naturaalarvulise astendajaga?

Vastus: ei leidu.

Lahendus. Olgu d aritmeetilise jada $\{a_n\}$ vahe, s.t. $a_n = a_1 + (n-1)d$ iga $n \geqslant 1$ korral, siis:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1+d} + \ldots + \frac{1}{a_1+nd} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{m}\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\Big)\,, \end{aligned}$$

kus $m = \max(a_1, d)$. Seega n kasvades S_n kasvab piiramatult.

Teiselt poolt on naturaalarvu $x \neq 1$ astmete pöördarvude summa

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x-1)}\,.$$

Seega ülesandes nõutud omadustega jada kõigi liikmete pöördarvude summa ei olla suurem kui

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots = 1 + \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots\Big) = 2\,,$$

vastuolu.

4. Olgu $a_n = F_n^n$, kus $\{F_n\}$ on Fibonacci jada: $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, kui $n \geqslant 3$. Tähistame

$$b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}}\,.$$

Kas jada $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ on tõkestatud (s.t. kas leidub selline arv M, et $b_k < M$ iga indeksi k korral)?

Vastus: jah, $b_n < 4$ iga n korral.

Lahendus. Tähistame

$$c_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}\,,$$

kus ruutjuurte arv on n. Induktsiooniga on lihtne veenduda, et $c_n < 2$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Tõepoolest, $c_1 = \sqrt{1} = 1 < 2$ ning kui $c_n < 2$, siis ka $c_{n+1} = \sqrt{1 + c_n} < \sqrt{1+2} < 2$.

Näitame nüüd, et $b_n < 4$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Selleks veendume kõigepealt (jällegi induktsiooniga), et $F_n \leqslant 2^{n-1}$. Tõepoolest, $n = 1$ ja $n = 2$ korral on väide ilmne ning kui $F_n \leqslant 2^{n-1}$ ja $F_{n+1} \leqslant 2^n$, siis ka $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \leqslant 2^{n-1} + 2^n \leqslant 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Samuti induktsiooniga näitame, et $n(n-1) \leqslant 2^n$ — tõepoolest, $1 \cdot 0 = 0 \leqslant 2^1$, $2 \cdot 1 = 2 \leqslant 2^2$, $3 \cdot 2 = 6 \leqslant 2^3$ ning $n \geqslant 3$ korral $\dfrac{n+1}{n-1} \leqslant 2$ ja järelikult $(n+1)n \leqslant 2 \cdot n(n-1)$. Niisiis $a_n = F_n^n \leqslant 2^{(n-1)n} \leqslant 2^{2^n}$ ning

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}} \leqslant \sqrt{2^{2^1} + \sqrt{2^{2^2} + \ldots + \sqrt{2^{2^n}}}} = \\ &= 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}} = 2c_n < 4\,. \end{aligned}$$

5. Olgu $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC}$ paarikaupa ristuvad ühikvektorid kolmemõõtmelises ruumis. Olgu ω tasand, mis sisaldab punkti O, ning A', B' ja C' punktide A, B ja C ristprojektsioonid tasandile ω. Leia avaldise $|OA'|^2 + |OB'|^2 + |OC'|^2$ kõigi võimalike väärtuste hulk, kui tasandi ω asendit varieerida.

Vastus: ainus võimalik väärtus on 2.

Lahendus. Näitame, et vaadeldava avaldise väärtus on 2 sõltumata tasandi ω asendist.

Olgu π tasand, mis läbib punkte O, A ja B ning l tasandite π ja ω lõikesirge. Lisaks olgu X ja Y punktide A ja B ristprojektsioonid sirgele l (vt. joonist 4). Siis

$$\angle OAX = 90^\circ - \angle AOX = \angle BOY = \alpha\,.$$

Seega

$$|AX|^2 + |BY|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,.$$

Olgu β nurk tasandite π ja ω vahel, siis $\angle AXA' = \angle BYB' = \beta$ ning

$$|AA'|^2 + |BB'|^2 = |AX|^2 \sin^2\beta + |BY|^2 \sin^2\beta = \sin^2\beta\,.$$

Pythagorase teoreemist saame võrduse

$$|OA'|^2 + |OB'|^2 = 2 - |AA'|^2 - |BB'|^2 = 2 - \sin^2\beta\,.$$

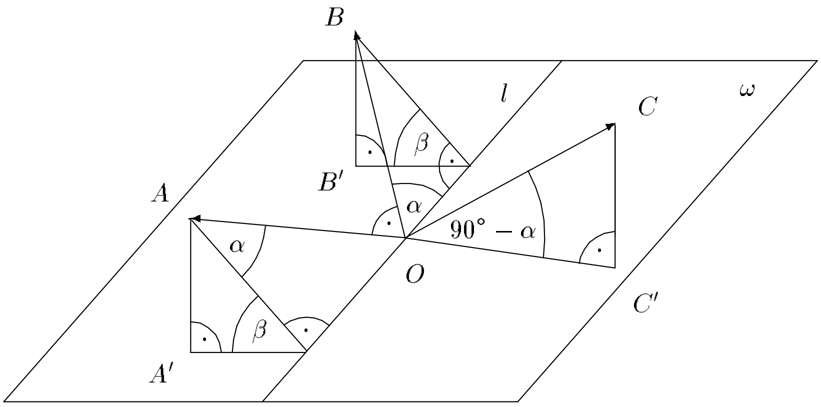
Vektor $\overrightarrow{OC}$ on risti tasandiga π, mistõttu $\angle COC' = 90^\circ - \beta$. Seega

$$|OC'|^2 = \cos^2(90^\circ - \beta) = \sin^2\beta\,.$$

Liites viimased kaks seost, saamegi

$$|OA'|^2 + |OB'|^2 + |OC'|^2 = 2\,,$$

sõltumata tasandi ω asendist.



Joonis 4

6. Olgu A, B, C, D punktid ruumis ning olgu M lõigu AC keskpunkt ja N lõigu BD keskpunkt. Tõesta, et

$$4|MN|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2 .$$

Lahendus. Esitame kõik vaadeldavad vektorid punktide kohavektoritena punkti A suhtes, s.t. kirjutis $\overrightarrow{X}$ tähistab vektorit $\overrightarrow{AX}$. Siis tõestatava võrduse parem pool omandab kuju

$$\overrightarrow{B}^2 + (\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B})^2 + (\overrightarrow{D} - \overrightarrow{C})^2 + \overrightarrow{D}^2 - \overrightarrow{C}^2 - (\overrightarrow{D} - \overrightarrow{B})^2 .$$

Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saame sellest avaldise

$$(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C})^2 .$$

Kuna $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C}$ ja $N = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D})$, siis võib viimase avaldise kirjutada kujul

$$(2\overrightarrow{N} - 2\overrightarrow{M})^2 .$$

See on aga parajasti $4\overrightarrow{MN}^2$, ehk $4|MN|^2$.

7. Olgu p algarv ja k täisarv, $0 \leqslant k < p$. Tõesta, et

$$k!(p-1-k)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod p .$$

Lahendus 1. Kuna iga naturaalarvu i korral $-i \equiv p - i \pmod p$, siis

$$k! = \prod_{i=1}^{k} i = (-1)^k \prod_{i=1}^{k}(-i) \equiv (-1)^k \prod_{i=1}^{k}(p-i) \pmod p .$$

Seega

$$k!(p-1-k)! \equiv (-1)^k \cdot \left(\prod_{i=1}^{k}(p-i)\right) \cdot (p-1-k)! = (-1)^k (p-1)! \pmod p .$$

Wilsoni teoreemist saame, et $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, sest p on algarv. Seega

$$k!(p-1-k)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod p ,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lahendus 2. Tõestame kõigepealt järgmise abitulemuse.

Lemma. Olgu p algarv ja k täisarv, $0 \leqslant k < p$. Siis

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p} .$$

TÕESTUS. Teeme induktsiooni k järgi. Induktsiooni baas $k = 0$ tuleneb võrdustest

$$\binom{p-1}{0} = 1 = (-1)^0 .$$

Kui lemma väide kehtib mingi $k < p-1$ jaoks, siis

$$\binom{p-1}{k+1} = \binom{p}{k+1} - \binom{p-1}{k} \equiv -\binom{p-1}{k} \equiv -(-1)^k = (-1)^{k+1} \pmod{p} .$$

Sellega on lemma tõestatud.

Kasutades binoomkordaja esitust faktoriaalide abil, saame lemmast, et

$$\frac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!} \equiv (-1)^k \pmod{p} .$$

Vastavalt Wilsoni teoreemile niisiis

$$k!(p-1-k)! \equiv (-1)^k (p-1)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod{p} .$$

8. Arvuga m ühistegurita täisarvu x *järguks* $\mathrm{ord}_m x$ nimetame vähimat positiivset täisarvu n, mille korral x^n annab m-ga jagades jäägi 1.

Olgu m positiivne täisarv ning a, b sellised m-ga ühistegurita täisarvud, et

$$\mathrm{ord}_m ab \neq \mathrm{VÜK}\,(\mathrm{ord}_m a, \mathrm{ord}_m b) .$$

Tõesta, et leidub algarv, mis esineb arvude $\mathrm{ord}_m a$ ja $\mathrm{ord}_m b$ kanoonilises esituses samal positiivsel astmel.

Lahendus. Kasutame $\mathrm{ord}_m x$ definitsioonist tulenevat asjaolu, et $x^n \equiv 1 \pmod{m}$ parajasti siis, kui n jagub arvuga $\mathrm{ord}_m x$. Olgu $k = \mathrm{ord}_m a$, $l = \mathrm{ord}_m b$ ja $\gamma = \mathrm{ord}_m ab$. Ülesande eelduse põhjal $\gamma \neq \mathrm{VÜK}\,(k,l)$. Et

$$(ab)^{\mathrm{VÜK}(k,l)} = a^{\mathrm{VÜK}(k,l)} b^{\mathrm{VÜK}(k,l)} \equiv 1 \cdot 1 = 1 \pmod{m} ,$$

siis $\mathrm{VÜK}\,(k,l)$ jagub arvuga γ. Teisest küljest

$$1 \equiv (ab)^{\mathrm{VÜK}(k,\gamma)} = a^{\mathrm{VÜK}(k,\gamma)} b^{\mathrm{VÜK}(k,\gamma)} \equiv b^{\mathrm{VÜK}(k,\gamma)} \pmod{m}$$

ning

$$1 \equiv (ab)^{\mathrm{VÜK}(l,\gamma)} = a^{\mathrm{VÜK}(l,\gamma)} b^{\mathrm{VÜK}(l,\gamma)} \equiv a^{\mathrm{VÜK}(l,\gamma)} \pmod{m} .$$

Seega $\mathrm{VÜK}\,(k,\gamma)$ jagub arvuga l ja $\mathrm{VÜK}\,(l,\gamma)$ jagub arvuga k, mistõttu $\mathrm{VÜK}\,(k,\gamma)$ ja $\mathrm{VÜK}\,(l,\gamma)$ jaguvad mõlemad arvuga $\mathrm{VÜK}\,(k,l)$. Teisalt — et $\mathrm{VÜK}\,(k,l)$ jagub arvuga γ, siis $\mathrm{VÜK}\,(k,l)$ jagub arvudega $\mathrm{VÜK}\,(k,\gamma)$ ja $\mathrm{VÜK}\,(l,\gamma)$. Kokku saame, et

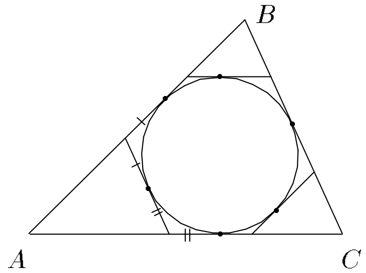
$$\mathrm{VÜK}\,(k,\gamma) = \mathrm{VÜK}\,(k,l) = \mathrm{VÜK}\,(l,\gamma) . \tag{1}$$

Olgu p selline algarv, mis esineb γ kanoonilises esituses (s.o. esituses algarvude astmete korrutisena) väiksemal astmel kui $\mathrm{VÜK}\,(k,l)$ kanoonilises esituses. Võrdustest (1) tuleneb nüüd otseselt, et p astendajad k ja l kanoonilises esituses on mõlemad võrdsed p astendajaga $\mathrm{VÜK}\,(k,l)$ kanoonilises esituses. See ühine astendaja on ka positiivne, sest vastasel korral ei saaks p astendaja γ kanoonilises esituses olla sellest väiksem.

Komplekt B (ülesanded noorema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Kolmnurga siseringjoonele raadiusega r on tõmmatud kolmnurga külgedega paralleelsed puutujad, mis eraldavad kolmnurgast kolm väikest kolmnurka. Tõesta, et nende kolme kolmnurga siseringjoonte raadiuste summa on r.

   Lahendus. Kuna ühest punktist ringjoonele tõmmatud puutujalõigud on võrdse pikkusega, siis kolmnurga ABC mistahes küljega paralleelse puutuja poolt eraldatud väikese kolmnurga ümbermõõt on võrdne vaadeldava külje vastastipust siseringjoonele tõmmatud puutujalõikude pikkuste summaga (vt. joonist 5). Seega on antud kolmnurga ABC ümbermõõt P võrdne tekkinud kolme väikese kolmnurga ümbermõõtude P_1, P_2 ja P_3 summaga. Olgu väikeste kolmnurkade siseringjoonte raadiused r_1, r_2 ja r_3. Väikeste kolmnurkade sarnasuse tõttu suure kolmnurgaga saame võrdused $\frac{r_1}{r} = \frac{P_1}{P}$, $\frac{r_2}{r} = \frac{P_2}{P}$ ja $\frac{r_3}{r} = \frac{P_3}{P}$. Liites saadud võrduste vastavad pooled ning arvestades, et $P_1 + P_2 + P_3 = P$, saamegi nõutud võrduse $r_1 + r_2 + r_3 = r$.



Joonis 5

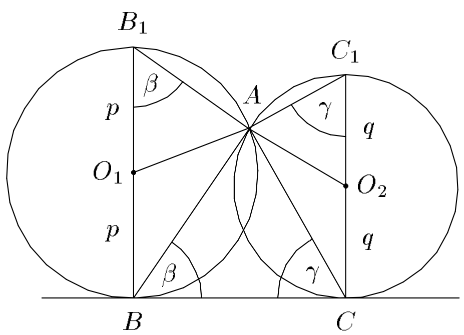
2. Punkti A läbivad kaks ringjoont raadiustega p ja q. Sirge BC puutub ühte neist ringjoontest punktis B ja teist punktis C (punktid B ja C on erinevad punktist A). Avalda kolmnurga ABC ümberringjoone raadius R suuruste p ja q kaudu.

   Vastus: $R = \sqrt{pq}$.

   Lahendus. Olgu ringjoonte keskpunktid vastavalt O_1 ja O_2, siis $|O_1B| = p$ ja $|O_2C| = q$. Võtame neil ringjoontel vastavalt punktid B_1 ja C_1 nii, et BB_1 ja CC_1 on ringjoonte diameetrid (vt. joonist 6). Nurgad B_1AB ja C_1AC kui ringjoonte diameetritele toetuvad piirdenurgad on täisnurgad. Olgu $\angle ABC = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$, siis $\angle AB_1B = \angle ABC = \beta$ ja $\angle AC_1C = \angle ACB = \gamma$. Täisnurksetest kolmnurkadest B_1AB ja C_1AC leiame, et $|AB| = 2p\sin\beta$ ja $|AC| = 2q\sin\gamma$. Siinusteoreemist kolmnurgas ABC saame, et $\frac{|AB|}{\sin\gamma} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = 2R$, mistõttu

$$pq = \frac{1}{4} \cdot \frac{|AB|}{\sin\beta} \cdot \frac{|AC|}{\sin\gamma} = R^2 .$$

   Järelikult $R = \sqrt{pq}$.



Joonis 6

3. Lahenda võrrand täisarvudes:
   a) $y^2 = 5x^2 + 6$;
   b) $2^x - 1 = y^2$.

   Vastus: a) lahendid puuduvad; b) $x = y = 0$ või $x = 1$, $y = \pm 1$.

   Lahendus. a) Paneme tähele, et võrduse kehtimiseks peavad arvud x ja y olema mõlemad 3-ga jaguvad või mõlemad 3-ga mittejaguvad, ning mistahes 3-ga mittejaguva täisarvu ruut annab 3-ga jagamisel jäägi 1. Seega juhul, kui arv y ei jagu 3-ga, ei jagu 3-ga ka arv x ning võrduse vasak pool annab 3-ga jagamisel jäägi 1, parem pool aga jäägi 2 (sest $5x^2 \equiv 5 \cdot 1 = 5 \equiv 2 \pmod 3$). Niisiis peab arv y jaguma 3-ga — siis aga jagub 3-ga ka arv x ning võrduse vasak pool jagub 9-ga, parem pool aga mitte. Seega antud võrrandil täisarvulised lahendid puuduvad.

   b) Ilmselt peab olema $x \geqslant 0$, sest vastasel juhul oleks võrduse vasakul pool murdarv, paremal pool on aga alati täisarv. Vaatleme nüüd kolme võimalikku juhtu.

   Kui $x = 0$, siis $2^x - 1 = 1 - 1 = 0$ ning $y = 0$.

   Kui $x = 1$, siis $2^x - 1 = 2 - 1 = 1$ ning $y = 1$ või $y = -1$.

   Kui $x \geqslant 2$, siis 2^x jagub 4-ga ning võrduse vasak pool annab 4-ga jagamisel jäägi 3. Mistahes täisarvu ruut aga annab 4-ga jagamisel jäägi 0 või 1, seega $x \geqslant 2$ korral võrrandil lahendid puuduvad.

4. Olgu a, k, m sellised positiivsed täisarvud, et arv $a-1$ jagub arvuga k^m. Tõesta, et arv $a^k - 1$ jagub arvuga k^{m+1}.

   Lahendus. Lahutame avaldise $a^k - 1$ teguriteks:

   $$a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + 1) .$$

   Et $a - 1$ jagub arvuga k^m, siis jagub ta ka arvuga k, s.t. $a \equiv 1 \pmod k$ ning

   $$a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + 1 \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = k \equiv 0 \pmod k .$$

   Seega arv $a^k - 1$ jagub arvuga $k^m \cdot k = k^{m+1}$.

5. Tasandil on märgitud 101 punkti, mis kõik ei asetse ühel sirgel. Läbi iga märgitud punktide paari tõmmatakse sirge. Tõesta, et märgitud punktide seas leidub punkt, mida läbib vähemalt 11 sirget.

   Lahendus. Valime märgitud punktide hulgast suvaliselt ühe punkti P ja oletame, et seda punkti läbib vähem kui 11 sirget (kui see nii ei ole, on P nõutud omadusega punkt ja tõestada pole rohkem midagi). Kuna punktist P on tõmmatud sirged läbi kõigi 100 ülejäänud märgitud punkti, siis peab Dirichlet' printsiibi põhjal leiduma sirge, mis läbib punkti P ja veel vähemalt kümmet märgitud punkti. Olgu see sirge s. Sirgel s asub niisiis vähemalt 11 märgitud punkti. Kuna kõik märgitud punktid ei asu ühel sirgel, siis leidub mingi märgitud punkt Q, mis ei asu sirgel s. Järelikult on punkti Q ja sirgel s asuvaid punkte ühendavad sirged kõik paarikaupa erinevad ning punkti Q läbib seega vähemalt 11 sirget.

6. Laual on 2003 münti, millest mõnedel on "kirja" ja ülejäänutel "kulli" külg ülalpool. Laua juurde astuvad järjekorras 2003 mustkunstnikku ja pööravad münte ümber järgmiselt: esimene neist valib mingi ühe mündi ja pöörab selle ümber, teine valib mingid kaks münti ja pöörab need ümber jne. kuni viimane, 2003. mustkunstnik pöörab ümber kõik mündid. Tõesta, et:
   a) müntide mistahes algseisu korral on mustkunstnikel võimalik valida ümberpööratavad mündid nii, et lõpuks oleks kõigil müntidel ülalpool üks ja sama külg;
   b) etteantud algseis määrab üheselt selle, kas lõpuks on kõigil müntidel ülalpool "kirja" või "kulli" külg.

   Lahendus. a) Vaatleme üldisemat juhtu, kus münte on 2003 asemel n, ning tõestame väite induktsiooniga kõigi paaritute n väärtuste jaoks. Kui $n = 1$, siis on laual üksainus münt ja ülesande väide ilmselt kehtib. Oletame nüüd, et väide kehtib mingi $n = 2k - 1$ korral, ning vaatleme juhtu, kus münte on $2k + 1$.

Kui algul on kõigil müntidel ülalpool üks ja sama külg, siis pööraku mistahes $i = 1, 2, \ldots, k$ korral i. mustkunstnik ümber mingid suvalised i münti ning $(2k+1-i)$. mustkunstnik pööraku ümber parajasti need mündid, mida i. mustkunstnik ei pööranud. Arvestades, et viimane, $(2k+1)$. mustkunstnik pöörab ümber kõik mündid, näeme, et iga münti pööratakse ümber parajasti $k+1$ korda ning järelikult on ka lõpuks kõigil müntidel ülalpool üks ja sama külg.

Vaatleme nüüd juhtu, kus algul ei ole kõigil müntidel ülalpool üks ja sama külg. Siis leidub münt, millel on ülalpool kiri, ja münt, millel on ülalpool kull. Märgime need kaks münti ära, ning pööraku nüüd esimesed $2k-1$ mustkunstnikku münte ümber nii, et keegi neist ei pööra kumbagi märgitud münti ning kõigi pööramiste järel on ülejäänud $2k-1$ mündil kõigil ülalpool üks ja sama külg (see on võimalik vastavalt induktsiooni eeldusele). Nüüd $(2k)$. mustkunstnik saab pöörata ümber need $2k-1$ münti ja selle märgitud mündi, millel on ülalpool sama külg nagu neil $2k-1$ mündil — seepeale on kõigil müntidel ülalpool üks ja sama külg ning see olukord säilib ka pärast seda, kui viimane mustkunstnik on kõik mündid veelkord ümber pööranud.

b) Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline algseis, mille korral müntidel võib lõpuks olla ülalpool nii kõigil kiri kui ka kõigil kull. See tähendaks, et $2 \cdot (1+2+\ldots+2003)$ pööramisega on võimalik seisust, kus kõigil müntidel on kiri ülalpool, jõuda seisuni, kus kõigil müntidel on kull ülalpool. See ei ole aga võimalik, sest iga münti tuleb selleks ümber pöörata paaritu arv kordi ja müntide arv 2003 on samuti paaritu, mistõttu ka pööramiste koguarv kui paaritu arvu paaritute liidetavate summa peab olema paaritu.

7. Lahenda võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases} .$$

Vastus: $(3, 3, 3)$ on ainus lahend.

Lahendus. Liites kõigi võrrandite vastavad pooled, saame

$$(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0 , \tag{2}$$

kust on näha, et $(3, 3, 3)$ on võrrandisüsteemi lahend. Näitame, et rohkem lahendeid ei ole.

Esimese võrrandi saame kirjutada kujul $y^3 = 9x^2 - 27x + 27$. Et ruutkolmliikme $9x^2 - 27x + 27$ diskriminant $D = 27^2 - 4 \cdot 9 \cdot 27 < 0$ ning pealiikme kordaja on positiivne, siis $9x^2 - 27x + 27 > 0$ mistahes reaalarvu x korral ning järelikult $y > 0$. Analoogiliselt veendume, et ka $x > 0$ ja $z > 0$.

Kirjutame nüüd esimese võrrandi kujul $y^3 - 27 = 9x^2 - 27x$, ehk $(y-3)(y^2+3y+9) = 9x(x-3)$. Kuna $x > 0$ ja $y > 0$, siis $y^2+3y+9 > 0$ ja $9x > 0$ ning $y-3$ ja $x-3$ peavad järelikult olema sama märgiga. Analoogiliselt leiame, et ka $z-3$ peab olema sellesama märgiga. Võrrandist (2) näeme nüüd, et arvud $x-3$, $y-3$ ja $z-3$ peavad kõik olema võrdsed nulliga.

8. Lahenda võrrandisüsteem x, y, z suhtes:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases} .$$

Vastus: lahendid on $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ ja $(0, 0, a)$.

Lahendus. Võttes esimese võrrandi pooled kuupi ja lahutades tulemusest kolmanda võrrandi, saame

$$3(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2) + 6xyz = 0 ,$$

ehk $3(x+y)(y+z)(z+x) = 0$.

Kui $x + y = 0$, siis esimesest võrrandist saame $z = a$ ja teisest võrrandist $x = y = 0$. Analoogiliselt saame $y + z = 0$ korral, et $x = a$ ja $y = z = 0$, ning $z + x = 0$ korral, et $y = a$ ja $x = z = 0$.