Ülesandeid iseseisvaks tööks: 3. komplekt 2001/2002 õ.-a.

Tähtaeg: 28. veebruar 2002

Seekord pakume lahendamiseks 12 ülesannet, mis on ainevalla järgi jaotatud nelja rühma. Iga rühma ülesanded on koostaja arvates järjestatud lihtsaimast raskeimani. Teisel lehel on lahendusvihjed, mida soovitame mitte vaadata, enne kui Sa pole iga ülesannet tõsiselt üritanud iseseisvalt lahendada.

Algebra

1. Lahenda võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

2. Olgu a, b ja c võrrandi $x^3 - x - 1 = 0$ lahendid. Leia avaldise

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$$

väärtus.

3. Tõesta, et

$$\frac{2 \cdot \sin 2^\circ + 4 \cdot \sin 4^\circ + 6 \cdot \sin 6^\circ + \ldots + 180 \cdot \sin 180^\circ}{90} = \cot 1^\circ \,.$$

Geomeetria

4. Olgu D kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt küljel BC. Ringjoon puutub lõiku BC punktis D, lõikab külge AB punktides M ja N ning lõikab külge AC punktides P ja Q. Tõesta, et

$$\frac{|AM| + |AN|}{|AC|} = \frac{|AP| + |AQ|}{|AB|} \,.$$

5. Kolmnurga ABC tipust B tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AC punktis D. Kolmnurga BDC ümberringjoon lõikab sirget AB teist korda punktis E ning kolmnurga ABD ümberringjoon lõikab sirget BC teist korda punktis F. Tõesta, et $|AE| = |CF|$.

6. Kolmnurga ABC külgedele kolmnurgast väljapoole konstrueeritakse ruudud $ABB'A'$, $ACC'A''$ ja $BCDE$. Olgu P ruudu $BCDE$ keskpunkt. Tõesta, et sirged $A'C$, $A''B$ ja PA lõikuvad ühes punktis.

Arvuteooria

7. Olgu n mistahes naturaalarv. Leia arvude $n! + 1$ ja $(n + 1)!$ suurim ühistegur.

8. Tõesta, et aritmeetiline jada, mille esimene liige on 1 ja vahe on 729, sisaldab lõpmata palju arvu 10 astmeid.

9. Tõesta, et iga täisarvu $n > 2$ jaoks leiduvad sellised paaritud täisarvud x ja y, et $7x^2+y^2 = 2^n$.

Diskreetne matemaatika

10. Milliseid arve on naturaalarvude 1 kuni 1000000 seas rohkem: kas neid, mis avalduvad nullist erineva täisruudu ja positiivse täiskuubi summana või neid, mis niiviisi ei avaldu?

11. Toas on 9 matemaatikut, kusjuures iga kolme toasolija seas on vähemalt kaks, kes on omavahel tuttavad. Tõesta, et nende matemaatikute hulgast saab valida 4 sellist, kes kõik on omavahel tuttavad.

12. On seltskond inimesi, kellest mõned on omavahel tuttavad ja teised ei ole. Igal õhtul kutsub üks neist kõik oma tuttavad enda juurde peole ja tutvustab neid kõiki ka üksteisega. Pärast seda, kui igaüks sellest seltskonnast on pidanud ühe peo, leiduvad seltskonnas ikkagi kaks inimest, kes ei tunne teineteist. Tõesta, et nad ei tunne teineteist ka pärast järgmist pidu.

Lahendusvihjed

Ära siia vaata enne, kui oled iga ülesannet tõsiselt üritanud iseseisvalt lahendada!

Algebra

1. Kui suured saavad olla x, y ja z? Millele vihjab $1 + 4x^2$ (võrratus)?
2. Lihtsusta avaldist, kasuta Viete'i valemeid.
3. Teisenda summa korrutiseks.

Geomeetria

4. Rehkendame!
5. Kasuta teoreemi lõikajatest.
6. Siin on mitu täisnurka — prooviks õige pööret. Aga õiges kohas.

Arvuteooria

7. Kasuta Wilsoni teoreemi.
8. Pöörame ülesande teistpidi. Näita, et $10^n = 729k + 1$, ehk $10^n - 1$ jagub 729-ga lõpmata paljude n korral.
9. Kasuta induktsiooni, moodustades uue paari olemasoleva põhjal. Selleks tuleb kaval olla ja proovida.

Diskreetne matemaatika

10. Kui suurte arvude kuubid võivad meil vaatluse all olla?
11. Vaatle eraldi juhte, kus:
    a) leidub matemaatik, kes tunneb ülimalt nelja ülejäänud matemaatikutest;
    b) igaüks neist tunneb vähemalt viit ülejäänutest.
12. Mõtle graafidele ja teedele graafides.