Ülesandeid iseseisvaks tööks: 3. komplekt 2001/2002 õ.-a.

Ülesannete lahendused

Algebra

1. Lahenda võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

Vastus: $x = y = z = 0$ või $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

Lahendus. Paneme tähele, et $4x^2 + 1 \geqslant 4x$, sest $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geqslant 0$. Kasutades seda võrratust saame esimesest võrrandist, et $y = \dfrac{4x^2}{1+4x^2} \leqslant \dfrac{4x^2}{4x} = x$. Teistest võrranditest saame analoogiliselt, et $z \leqslant y$ ja $x \leqslant z$. Seega $x \leqslant z \leqslant y \leqslant x$, ehk $x = y = z$. Teisendades võrrandi $\dfrac{4x^2}{1+4x^2} = x$ kujule $x(4x^2 - 4x + 1) = 0$ näeme, et sobivateks x väärtusteks on 0 ja $\dfrac{1}{2}$.

2. Olgu a, b ja c võrrandi $x^3 - x - 1 = 0$ lahendid. Leia avaldise

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$$

väärtus.

Vastus: 1.

Lahendus 1. Viies murrud ühisele nimetajale ja avades sulud, saame

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c} = \frac{3 + a + b + c - ab - ac - bc - 3abc}{1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc}\,.$$

Viete'i valemitest $a + b + c = 0$, $abc = 1$ ja $ab + ac + bc = -1$ ning seega

$$\frac{3 + a + b + c - ab - ac - bc - 3abc}{1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc} = \frac{3 + 0 + 1 - 3}{1 + 0 - 1 + 1} = 1\,.$$

Lahendus 2. Paneme tähele, et

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c} = 2 \cdot \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) - 3\,.$$

Kuna a, b ja c on polünoomi $P(x) = x^3 - x - 1$ nullkohad, siis $a+1$, $b+1$ ja $c+1$ on polünoomi $P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ nullkohad. Kui aga polünoomil $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ on nullkohad A, B ja C, siis $\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B} + \dfrac{1}{C} = \dfrac{AB + BC + CA}{ABC} = -\dfrac{q}{r}$. Seega $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = 2$ ning

$$2 \cdot \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1\,.$$

3. Tõesta, et

$$\frac{2\cdot\sin 2^\circ + 4\cdot\sin 4^\circ + 6\cdot\sin 6^\circ + \ldots + 180\cdot\sin 180^\circ}{90} = \cot 1^\circ\ .$$

Lahendus. Meil on vaja tõestada, et

$$2\cdot\sin 2^\circ + 4\cdot\sin 4^\circ + \ldots + 178\cdot\sin 178^\circ = 90\cdot\cot 1^\circ\ ,$$

mis on samaväärne võrdusega

$$2\sin 2^\circ\sin 1^\circ + 2\cdot(2\sin 4^\circ\sin 1^\circ) + \ldots + 89\cdot(2\sin 178^\circ\sin 1^\circ) = 90\cdot\cos 1^\circ\ .$$

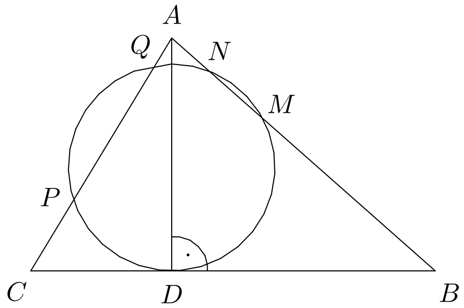
Kasutades võrdust $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ saame

$$\begin{aligned}
&2\sin 2^\circ\sin 1^\circ + 2\cdot(2\sin 4^\circ\sin 1^\circ) + \ldots + 89\cdot(2\sin 178^\circ\sin 1^\circ) = \\
&\quad = (\cos 1^\circ - \cos 3^\circ) + 2\cdot(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) + \ldots + 89\cdot(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ) = \\
&\quad = \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \ldots + \cos 175^\circ + \cos 177^\circ - 89\cdot\cos 179^\circ = \\
&\quad = \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \ldots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) - 89\cdot\cos 179^\circ = \\
&\quad = \cos 1^\circ + 89\cdot\cos 1^\circ = 90\cdot\cos 1^\circ\ .
\end{aligned}$$

Geomeetria

4. Olgu D kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt küljel BC. Ringjoon puutub lõiku BC punktis D, lõikab külge AB punktides M ja N ning lõikab külge AC punktides P ja Q. Tõesta, et

$$\frac{|AM|+|AN|}{|AC|} = \frac{|AP|+|AQ|}{|AB|}\ .$$



Joonis 1

Lahendus. Meil on vaja näidata, et

$$|AB|\cdot(|AM|+|AN|) = |AC|\cdot(|AP|+|AQ|)\ .$$

Teoreemist puutuja ja lõikaja kohta saame, et

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= |BN|\cdot|BM| = (|AB|-|AN|)\cdot(|AB|-|AM|) = \\
&= |AB|^2 - |AB|\cdot(|AM|+|AN|) + |AM|\cdot|AN|
\end{aligned}$$

(vt. joonist 1). Siit ja Pythagorase teoreemist kolmnurgas ABD saame, et

$$|AB|\cdot(|AM|+|AN|) = |AB|^2 - |BD|^2 + |AM|\cdot|AN| = |AD|^2 + |AM|\cdot|AN|\ .$$

Analoogiliselt

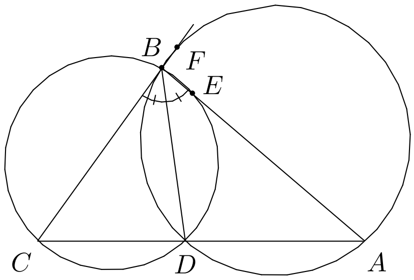
$$\begin{aligned} |CD|^2 &= |CQ| \cdot |CP| = (|AC| - |AQ|) \cdot (|AC| - |AP|) = \\ &= |AC|^2 - |AC| \cdot (|AP| + |AQ|) + |AP| \cdot |AQ| \end{aligned}$$

ning

$$|AC| \cdot (|AP| + |AQ|) = |AC|^2 - |CD|^2 + |AP| \cdot |AQ| = |AD|^2 + |AP| \cdot |AQ| \,.$$

Jääb üle tähele panna, et $|AP| \cdot |AQ| = |AM| \cdot |AN|$ (ühest punktist ringjoonele tõmmatud lõikajate omadus).

5. Kolmnurga ABC tipust B tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AC punktis D. Kolmnurga BDC ümberringjoon lõikab sirget AB teist korda punktis E ning kolmnurga ABD ümberringjoon lõikab sirget BC teist korda punktis F. Tõesta, et $|AE| = |CF|$.



Joonis 2

Lahendus. Nurgapoolitaja omadusest saame

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BC|} \qquad (1)$$

ning ühest punktist ringjoonele tõmmatud lõikajate omadusest

$$|AD| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AB| \,, \quad |CD| \cdot |AC| = |CF| \cdot |BC| \,,$$

kust

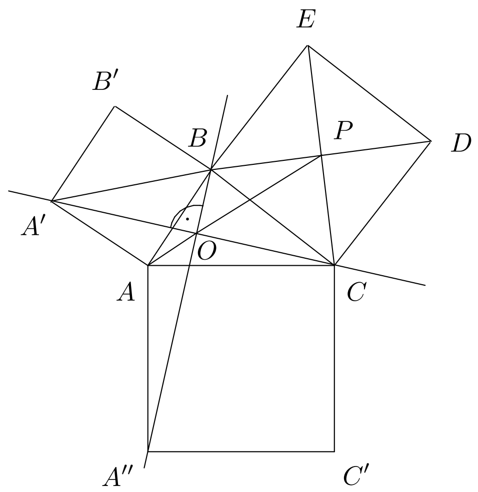
$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AE| \cdot |AB|}{|CF| \cdot |BC|}$$

(vt. joonist 2). Kasutades nüüd võrrandit (1) saame, et

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE| \cdot |AB|}{|CF| \cdot |BC|} \,,$$

kust $\dfrac{|AE|}{|CF|} = 1$ ehk $|AE| = |CF|$.

6. Kolmnurga ABC külgedele kolmnurgast väljapoole konstrueeritakse ruudud $ABB'A'$, $ACC'A''$ ja $BCDE$. Olgu P ruudu $BCDE$ keskpunkt. Tõesta, et sirged $A'C$, $A''B$ ja PA lõikuvad ühes punktis.



Joonis 3

Lahendus. Paneme tähele, et 90-kraadine pööre ümber punkti A viib punkti C punktiks A'' ja punkti A' punktiks B. Seega on kolmnurk CAA' võrdne kolmnurgaga $A''AB$ ning järelikult $|A'C| = |A''B|$ ja $A'C \perp A''B$ (kuna ühte neist lõikudest 90 kraadi võrra pöörates saame teise). Olgu O sirgete $A'C$ ja $A''B$ lõikepunkt (vt. joonist 3). Eelnevast järeldub, et $\angle AA'O = \angle AA'C = \angle ABA'' = \angle ABO$, s.t. $AOBA'$ on kõõlnelinurk. Järelikult

$$\angle AOB = \angle AOA' + \angle A'OB = \angle ABA' + 90^\circ = 135^\circ$$

ja $\angle AOA'' = 45^\circ$. Samuti on $BPCO$ kõõlnelinurk (sest $\angle BPC = \angle BOC = 90^\circ$), mistõttu $\angle POB = \angle PCB = 45^\circ$. Niisiis $\angle POB = \angle AOA''$, s.t. punktid A, O ja P asuvad ühel sirgel, mida oligi tarvis tõestada.

Arvuteooria

7. Olgu n mistahes naturaalarv. Leia arvude $n! + 1$ ja $(n+1)!$ suurim ühistegur.

   Vastus: 1, kui $n+1$ on kordarv, ning $n+1$, kui $n+1$ on algarv.

   Lahendus. Paneme tähele, et arvu $(n+1)!$ kõik algtegurid sisalduvad hulgas $\{2, 3, \dots, n{+}1\}$ ning arv $n!+1$ ei jagu ilmselt ühegi arvuga hulgast $\{2, 3, \dots, n\}$. Kui $n!+1$ ei jagu ka arvuga $n{+}1$, siis arvude $(n{+}1)!$ ja $n!{+}1$ suurim ühistegur on 1, sest neil puuduvad ühised algtegurid — kui aga $n!+1$ jagub arvuga $n+1$, siis on $n+1$ arvude $(n+1)!$ ja $n!+1$ suurim ühistegur. Vastavalt Wilsoni teoreemile on $n+1$ arvu $n!+1$ jagaja siis ja ainult siis, kui $n+1$ on algarv.

8. Tõesta, et aritmeetiline jada, mille esimene liige on 1 ja vahe on 729, sisaldab lõpmata palju arvu 10 astmeid.

   Lahendus 1. Näitame, et arv $10^{81n} - 1$ jagub 729-ga iga $n \geqslant 1$ korral. Tõepoolest,

   $$10^{81n} - 1 = \left(10^{81}\right)^n - 1^n = (10^{81} - 1) \cdot N\,,$$

   kus N on täisarv. Nüüd

   $$10^{81} - 1 = \underbrace{99999\dots9}_{\text{81 numbrit 9}} = 9 \cdot \underbrace{11111\dots1}_{\text{81 numbrit 1}} =$$
   $$= 9 \cdot 111111111 \cdot \underbrace{1000000001000000001\dots1000000001}_{\text{8 blokki nulle}}\,.$$

   Viimases korrutises iga tegur jagub 9-ga (sest iga teguri ristsumma on 9) ning kogu korrutis jagub järelikult arvuga $9^3 = 729$.

Lahendus 2 (Hendrik Nigul) Antud jada sisaldab parajasti kõik positiivsed täisarvud, mis on kongruentsed 1-ga *modulo* 729. Seega piisab tõestada, et $10^k \equiv 1 \pmod{729}$ lõpmata paljude positiivsete täisarvude k korral. Et $\text{SÜT}(10, 729) = 1$, siis Euleri teoreemist saame, et $10^{\varphi(729)} \equiv 1 \pmod{729}$ (kus $\varphi(n)$ on Euleri funktsiooni väärtus n korral, s.t. n-st väiksemate ja sellega ühistegurita positiivsete täisarvude arv). Tähistame $m = \varphi(729)$, siis sobivateks astendajateks k on kõik arvu m kordsed.

9. Tõesta, et iga täisarvu $n > 2$ jaoks leiduvad sellised paaritud täisarvud x ja y, et $7x^2+y^2 = 2^n$.

Lahendus 1. Teeme induktsiooni n järgi. Kui $n = 3$, võtame $x = y = 1$. Olgu meil nüüd arvud x ja y nii, et $7x^2 + y^2 = 2^n$, ning püüame leida arvud x_1 ja y_1 nii, et $7x_1^2 + y_1^2 = 2^{n+1}$. Paneme tähele, et $7 \cdot 8x^2 + 8y^2 = 2^{n+3}$ ning et $7(x + y)^2 + (7x - y)^2 = 7 \cdot 8x^2 + 8y^2$ ja $7(x - y)^2 + (7x + y)^2 = 7 \cdot 8x^2 + 8y^2$. Näitame, et üks arvudest $7x + y$ ja $|7x - y|$ on paaris, aga ei jagu 4-ga. Tõepoolest, et x ja y on paaritud arvud, siis on $7x + y$ ja $|7x - y|$ mõlemad paaris. Oletame vastuväiteliselt, et nad mõlemad jaguvad 4-ga. Siis ka arv $7x+y+|7x-y|$, s.t. $14x$ või $2y$ jagub 4-ga, mistõttu vastavalt x või y peaks olema paarisarv — vastuolu. Nüüd $7x+y \equiv 8x+y-x \equiv y-x \pmod 4$. Seega juhul, kui $7x+y \equiv 2 \pmod 4$, on ka $|x-y| \equiv 2 \pmod 4$. Samuti juhul, kui $|7x - y| \equiv 2 \pmod 4$, on ka $x + y \equiv 2 \pmod 4$. Seega saame valida paaridest $(7x + y, |x - y|)$ ja $(|7x - y|, x + y)$ ühe nii, et selle mõlemad komponendid on kongruentsed 2-ga *modulo* 4. Et $7(x \pm y)^2 + (7x \mp y)^2 = 2^{n+3}$, siis $7\left(\frac{x \pm y}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x \mp y}{2}\right)^2 = 2^{n+1}$, ning sobiva märkide valiku korral on $x_1 = \frac{x \pm y}{2}$ ja $y_1 = \frac{7x \mp y}{2}$ mõlemad paaritud arvud.

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses teeme induktsiooni n järgi ning püüame lähtudes arvudest x ja y, mille korral $7x^2+y^2 = 2^n$, leida arvud x_1 ja y_1 nii, et $7x_1^2+y_1^2 = 2^{n+1}$. Paneme tähele, et $2^{n+1} = 14x^2+2y^2$ — seega otsime me selliseid arve x_1 ja y_1, et $7x_1^2+y_1^2 = 14x^2+2y^2$. Otsime arve x_1 ja y_1 kujul $x_1 = ax + by$ ja $y_1 = cx + dy$. Soovitud tingimus on täidetud, kui $7ab + cd = 0$, $7a^2 + c^2 = 14$ ja $7b^2 + d^2 = 2$. Siit saame, et $7(a + b)^2 + (c + d)^2 = 16$. See võrdus kehtib, kui $a + b = 1$, $c + d = \pm 3$ või $a + b = 0$, $c + d = 4$. Nende võrrandisüsteemide lahenditeks, mis rahuldavad kõiki tingimusi $7ab + cd = 0$, $7a^2 + c^2 = 14$ ja $7b^2 + d^2 = 2$, on vastavalt $a = b = \frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{7}{2}$, $d = \mp\frac{1}{2}$ (ehk $x_1 = \frac{x + y}{2}$ ja $y_1 = \frac{|7x - y|}{2}$) ning $a = \pm\frac{1}{2}$, $b = \mp\frac{1}{2}$, $c = \frac{7}{2}$, $d = \frac{1}{2}$ (ehk $x_1 = \frac{|x - y|}{2}$ ja $y_1 = \frac{7x + y}{2}$). Jääb üle näidata, et vähemalt ühel neist kahest juhust on x_1 ja y_1 mõlemad paaritud arvud — seda teeme sarnaselt esimese lahendusega.

Diskreetne matemaatika

10. Milliseid arve on naturaalarvude 1 kuni 1000000 seas rohkem: kas neid, mis avalduvad nullist erineva täisruudu ja positiivse täiskuubi summana või neid, mis niiviisi ei avaldu?

Vastus: arve, mis ei avaldu nullist erineva täisruudu ja positiivse täiskuubi summana.

Lahendus. Naturaalarvud, mille kuubid ei ületa 1000000, on 1 kuni $1000000^{\frac{1}{3}} = 100$. Naturaalarvud, mille ruudud ei ületa 1000000, on 1 kuni $1000000^{\frac{1}{2}} = 1000$. Nendest saab moodustada kokku $100 \cdot 1000 = 100000$ paari. Et $100000 < 500000 = \frac{1000000}{2}$, siis on vaadeldavas hulgas rohkem selliseid arve, mida ei saa esitada nullist erineva täisruudu ja positiivse täiskuubi summana.

11. Toas on 9 matemaatikut, kusjuures iga kolme toasolija seas on vähemalt kaks, kes on omavahel tuttavad. Tõesta, et nende matemaatikute hulgast saab valida 4 sellist, kes kõik on omavahel tuttavad.

Lahendus. Vaatleme kolme võimalikku juhtu:

1) Leidub matemaatik (olgu see A), kes tunneb vähemalt 6 ülejäänutest. Olgu B üks neist 6-st. Kui B tunneb selle kuuiku ülejäänud viiest matemaatikust ülimalt kahte, siis ta ei tunne neist vähemalt kolme. Olgu need kolm matemaatikut C, D ja E — siis kolmikust (B, C, D) tunnevad teineteist C ja D, kolmikust (B, D, E) tunnevad teineteist D ja E ning kolmikust (B, C, E) tunnevad teineteist C ja E, sest muidu poleks vastavas kolmikus ühtegi tuttavate paari. Seega on A, C, D ja E paarikaupa tuttavad. Kui aga B tunneb vaadeldava kuuiku ülejäänud viiest matemaatikust vähemalt kolme (olgu need C', D', E'), siis ka kolmikus (C', D', E') peab olema tuttavate paar. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et need tuttavad on C' ja D'. Siis A, B, C' ja D' on paarikaupa tuttavad.

2) Leidub matemaatik (olgu see A'), kes tunneb ülimalt 4 ülejäänutest, ehk teisisõnu ei tunne vähemalt 4 ülejäänutest. Need matemaatikud, keda A' ei tunne, peavad vastavalt ülesande tingimusele olema kõik omavahel tuttavad.

3) Igaüks matemaatikutest tunneb täpselt viit ülejäänud matemaatikut. Tuttavate paare peaks sel juhul kokku olema $\frac{9 \cdot 5}{2}$, mis pole aga täisarv — seega ei ole selline juht võimalik.

12. On seltskond inimesi, kellest mõned on omavahel tuttavad ja teised ei ole. Igal õhtul kutsub üks neist kõik oma tuttavad enda juurde peole ja tutvustab neid kõiki ka üksteisega. Pärast seda, kui igaüks sellest seltskonnast on pidanud ühe peo, leiduvad seltskonnas ikkagi kaks inimest, kes ei tunne teineteist. Tõesta, et nad ei tunne teineteist ka pärast järgmist pidu.

Lahendus. Olgu seltskonnas n inimest. Moodustame loomulikul viisil tutvusgraafi, mille tipud vastavad inimestele ja serv kahe tipu vahel on olemas parajasti siis, kui need kaks inimest on tuttavad. Selleks, et kaks inimest A ja B võiksid mingi arvu pidude järel omavahel tuttavaks saada, peavad neile vastavad tipud a ja b kuuluma graafi samasse sidususkomponenti, ehk graafis peab leiduma mingi neid tippe ühendav tee — vaatleme lühimat sellist teed. Iga kord, kui tippe a ja b ühendava lühima tee mingile tipule c vastav inimene korraldab peo, väheneb selle lühima tee pikkus vähemalt 1 võrra (tipu c naabertipud sellel teel ühendatakse omavahel servaga) — seega A ja B saavad tuttavaks hiljemalt siis, kui vaadeldava tee tippudele vastavatest inimestest igaüks on korraldanud ühe peo. Järelikult niipea, kui igaüks seltskonnast on korraldanud ühe peo, on iga inimeste paar, kellel on üldse võimalus tuttavaks saada, ka tuttavaks saanud, ning järgmisel peol ei saa enam keegi omavahel tuttavaks.