Ülesandeid iseseisvaks tööks: 2. komplekt

Tähtaeg: 25. jaanuar 2002

1. Tõesta, et võrdustest

$$a_1^2 + b_1^2 = 1\,,\ a_2^2 + b_2^2 = 1\,,\ a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

järelduvad võrdused

$$a_1^2 + a_2^2 = 1\,,\ b_1^2 + b_2^2 = 1\,,\ a_1b_1 + a_2b_2 = 0\,.$$

2. Leia kõik positiivsed täisarvud a, b, c, mille korral $ab + ac + bc$ on algarv ning kehtib võrdus

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}.$$

3. Tõesta, et kui võrrandi $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ lahendid on neli positiivset reaalarvu, siis kehtivad võrratused:
   (i) $pr - 16s \geqslant 0$;
   (ii) $q^2 - 36s \geqslant 0$.

   Millal kehtivad võrdused?

4. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}\backslash\{1, -1\} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad iga oma määramispiirkonda kuuluva reaalarvu x korral tingimust

$$f\Big(\frac{x-3}{x+1}\Big) + f\Big(\frac{3+x}{1-x}\Big) = x\ .$$

5. Kui palju on ruutpolünoome $ax^2 + bx + c$, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:
   (i) kordajad a, b, c on paarikaupa erinevad arvud hulgast $\{1, 2, 3, \ldots, 2002\}$;
   (ii) $x = -1$ on selle polünoomi juur?

6. Tähistagu iga naturaalarvu $n \geqslant 3$ jaoks $f(n)$ selliste paarikaupa mittekongruentsete kolmnurkade arvu, mille küljepikkused on täisarvud ja ümbermõõt on n (näiteks $f(3) = 1$, $f(4) = 0$, $f(7) = 2$). Tõesta, et
   a) $f(1999) > f(1996)$;
   b) $f(2000) = f(1997)$.

7. On antud kümme münti, mille kogukaal on 20 grammi ning iga mündi kaal grammides on positiivne täisarv, mis ei ületa arvu 10. Tõesta, et need mündid saab jagada kahte ossa, nii et kummassegi ossa kuuluvate müntide kogukaal on 10 grammi.

8. Tõesta, et leidub kumer kuusnurk, mille kõik sisenurgad on võrdsed ja küljepikkused on 1, 2, 3, 4, 5, 6 mingis järjekorras.