Ülesandeid iseseisvaks tööks: 2. komplekt

Ülesannete lahendused

1. Tõesta, et võrdustest

$$a_1^2+b_1^2=1\,,\ a_2^2+b_2^2=1\,,\ a_1a_2+b_1b_2=0$$

järelduvad võrdused

$$a_1^2+a_2^2=1\,,\ b_1^2+b_2^2=1\,,\ a_1b_1+a_2b_2=0\,.$$

Lahendus. Esimese kahe võrduse põhjal leiduvad nurgad α ja β, nii et $a_1=\cos\alpha$, $b_1=\sin\alpha$ ja $a_2=\cos\beta$, $b_2=\sin\beta$. Kolmandast võrdusest saame, et $\cos(\beta-\alpha)=a_1a_2+b_1b_2=0$. Seega $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, kus k võib olla suvaline täisarv. Nüüd

$$\begin{aligned}
a_2 &= \cos\beta=\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}+k\pi)=(-1)^{k+1}\sin\alpha\,,\\
b_2 &= \sin\beta=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}+k\pi)=(-1)^{k}\cos\alpha\,,\\
a_1 &= \cos\alpha\,,\\
b_1 &= \sin\alpha\,,
\end{aligned}$$

millest järelduvad nõutud võrdused.

2. Leia kõik positiivsed täisarvud a, b, c, mille korral $ab+ac+bc$ on algarv ning kehtib võrdus

$$\frac{a+b}{a+c}=\frac{b+c}{b+a}.$$

Vastus: $a=b=c=1$ on ainus võimalus.
Lahendus. Ülesande tingimuse kohaselt

$$(a+b)^2=(a+c)(b+c)=ab+ac+bc+c^2\,,$$

kust

$$ab+ac+bc=(a+b)^2-c^2=(a+b-c)(a+b+c)\,.$$

Kuna $ab+ac+bc$ peab olema algarv ning $a+b+c>a+b-c$, siis $ab+ac+bc=a+b+c$. Viies võrduses kõik liikmed ühele poole, saame, et $a(b-1)+c(a-1)+b(c-1)=0$, mis on võimalik vaid juhul, kui $a=b=c=1$. Ilmselt see lahend rahuldab ülesande tingimusi.

3. Tõesta, et kui võrrandi $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ lahendid on neli positiivset reaalarvu, siis kehtivad võrratused:
   (i) $pr-16s\geqslant 0$;
   (ii) $q^2-36s\geqslant 0$.

   Millal kehtivad võrdused?

Vastus: mõlemad võrdused kehtivad parajasti siis, kui $x_1=x_2=x_3=x_4$.
Lahendus. Olgu võrrandi lahendid x_1, x_2, x_3 ja x_4. Viete'i valemite põhjal saame, et

$$\begin{aligned}
p &= -(x_1+x_2+x_3+x_4)\,,\\
q &= x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\,,\\
r &= -(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)\,,\\
s &= x_1x_2x_3x_4\,.
\end{aligned}$$

(i) Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame, et

$$-p = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 4(x_1 x_2 x_3 x_4)^{\frac{1}{4}} = 4s^{\frac{1}{4}}$$

ja

$$-r = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \geqslant 4(x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3)^{\frac{1}{4}} = 4s^{\frac{3}{4}}$$

ning seega $pr = (-p) \cdot (-r) \geqslant 16s$ ehk $pr - 16s \geqslant 0$. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ (siis ka $x_1x_2x_3 = x_1x_2x_4 = x_1x_3x_4 = x_2x_3x_4$).
(ii) Analoogiliselt saame, et

$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \geqslant 6(x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3)^{\frac{1}{6}} = 6s^{\frac{1}{2}}$$

ja seega $q^2 - 36s \geqslant 0$; võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1x_2 = x_1x_3 = x_1x_4 = x_2x_3 = x_2x_4 = x_3x_4$ ehk $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

4. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad iga oma määramispiirkonda kuuluva reaalarvu x korral tingimust

$$f\Big(\frac{x-3}{x+1}\Big) + f\Big(\frac{3+x}{1-x}\Big) = x\ .$$

Vastus: $f(x) = \dfrac{7t + t^3}{2 - 2t^2}$ on ainus selline funktsioon.

Lahendus. Võttes $t = \dfrac{x-3}{x+1}$ saame, et $x = \dfrac{3+t}{1-t}$ ja $\dfrac{3+x}{1-x} = \dfrac{t-3}{t+1}$ ning

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t}\ .$$

Võtame nüüd $t = \dfrac{3+x}{1-x}$. Siis $x = \dfrac{t-3}{t+1}$ ja $\dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{3+t}{1-t}$ ning

$$f\left(\frac{3+t}{1-t}\right) + f(t) = \frac{t-3}{t+1}\ .$$

Liites saadud võrdused, saame, et

$$2f(t) + \underbrace{f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) + f\left(\frac{3+t}{1-t}\right)}_{=t} = \frac{8t}{1-t^2}\ .$$

Niisiis

$$f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2} = \frac{7t + t^3}{2 - 2t^2}\ .$$

5. Kui palju on ruutpolünoome $ax^2 + bx + c$, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:
   (i) kordajad a, b, c on paarikaupa erinevad arvud hulgast $\{1, 2, 3, \ldots, 2002\}$;
   (ii) $x = -1$ on selle polünoomi juur?

Vastus: 2002000.

Lahendus. Tingimus, et arv -1 on polünoomi $ax^2 + bx + c$ juur, on samaväärne sellega, et $a(-1)^2 + b(-1) + c = 0$ ehk $b = a + c$. Kui nüüd $a < c$, siis $1 \leqslant a \leqslant 1000$ ja c saab iga a korral omandada väärtused $a + 1$ kuni $2002 - a$. Seega $a = 1$ korral saame 2000 sobivat paari (a, c); kui $a = 2$, siis 1998 paari, jne. Kokku on selliseid paare

$$2000 + 1998 + \ldots + 2 = 1000 \cdot 1001\ .$$

Sama palju paare saame juhul $a > c$, seega sobivaid kolmikuid (a, b, c) on $2 \cdot 1000 \cdot 1001 = 2002000$.

6. Tähistagu iga naturaalarvu $n \geqslant 3$ jaoks $f(n)$ selliste paarikaupa mittekongruentsete kolmnurkade arvu, mille küljepikkused on täisarvud ja ümbermõõt on n (näiteks $f(3) = 1$, $f(4) = 0$, $f(7) = 2$). Tõesta, et
   a) $f(1999) > f(1996)$;
   b) $f(2000) = f(1997)$.

Lahendus. a) Olgu $a \geqslant b \geqslant c$ sellised positiivsed täisarvud, et nad on mingi kolmnurga küljepikkusteks ja $a + b + c = 1996$. Siis $a + 1, b + 1, c + 1$ on samuti mingi kolmnurga küljepikkusteks, sest

$$a < b + c \;\Rightarrow\; a + 1 < (b + 1) + (c + 1) \;,$$

kusjuures uue kolmnurga ümbermõõt on 1999. Lisaks leidub kolmnurk külgede pikkustega $(999, 999, 1)$, mis ei ole saadav eeltoodud viisil. Seega $f(1999) > f(1996)$.

b) Analoogiliselt saame ka, et $f(2000) \geqslant f(1997)$. Kui $x \geqslant y \geqslant z$ on mingi kolmnurga täisarvulised küljepikkused ja $x + y + z = 2000$, siis $z \neq 1$; vastasel korral oleks x ja y erineva paarsusega ja kehtiks $x \geqslant y + 1 = y + z$, mis on vastuolus kolmnurga võrratusega. Niisiis $x \geqslant y \geqslant z > 1$ ja $x - 1 \geqslant y - 1 \geqslant z - 1 \geqslant 0$. Kolmnurga võrratusest saame, et $x < y + z$. Oletame, et $x = y + z - 1$. Siis $2000 = x + y + z = 2x + 1$, mis on võimatu. Seega $x < y + z - 1$. Nüüd $x - 1 < (y - 1) + (z - 1)$ ja $x - 1, y - 1, z - 1$ on sellise kolmnurga küljepikkused, mille ümbermõõt on 1997. Järelikult $f(2000) \leqslant f(1997)$, mis annabki nõutud tulemuse.

7. On antud kümme münti, mille kogukaal on 20 grammi ning iga mündi kaal grammides on positiivne täisarv, mis ei ületa arvu 10. Tõesta, et need mündid saab jagada kahte ossa, nii et kummassegi ossa kuuluvate müntide kogukaal on 10 grammi.

Lahendus. Olgu müntide kaalud $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ kahanevas järjestuses. Siis

$$10 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots a_{10} \geqslant 1$$

ja $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 20$. Tähistame iga i, $1 \leqslant i \leqslant 9$ korral $S_i = a_1 + \ldots + a_i$. Vaatleme 11 arvu 0, S_1, S_2, $\ldots$, S_9 ja $a_1 - a_{10}$. Paneme tähele, et kõik need arvud on mittenegatiivsed ning $0 \leqslant a_1 - a_{10} \leqslant 9$ ja $1 < S_i < 20$. Vaatame nende arvude 10-ga jagamisel tekkivaid jääke. Kuna meil on 10 võimalikku jääki, siis Dirichlet' printsiibi põhjal annavad kaks neist arvudest 10-ga jagamisel sama jäägi. Meil on neli erinevat võimalust.

(a) Mingi indeksi j korral annab S_j jäägi 0. Siis $S_j = 10$ ja me saame mündid jaotada gruppidesse $a_1, \ldots, a_j$ ja $a_{j+1}, \ldots, a_{10}$.
(b) Arv $a_1 - a_{10}$ annab jäägi 0. Siis peab olema $a_1 - a_{10} = 0$ ja seega kaaluvad kõik mündid võrdselt 2 grammi ning nõutav jaotamine on ilmselt võimalik.
(c) Mingite indeksite j ja k, $j < k$ korral annavad S_j ja S_k sama jäägi. Siis peab kehtima $S_k - S_j = 10$, s.t. $a_{j+1} + \ldots + a_{k-1} + a_k = 10$ ning saame mündid nõutaval viisil jaotada.
(d) Mingi indeksi j korral annavad S_j ja $a_1 - a_{10}$ sama jäägi. Siis $S_j - (a_1 - a_{10}) = 10$, s.t. $a_2 + a_3 + \ldots + a_j + a_{10} = 10$ ning saame mündid nõutaval viisil jaotada.

8. Tõesta, et leidub kumer kuusnurk, mille kõik sisenurgad on võrdsed ja küljepikkused on 1, 2, 3, 4, 5, 6 mingis järjekorras.

Lahendus. Vaatleme võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega 9. "Lõikame" selle kolmnurga nurkadest ära korrapärased kolmnurgad küljepikkustega 1, 2 ja 3. Alles jääb kuusnurk, mille kõik sisenurgad on võrdsed ning küljepikkused on 1, 5, 3, 4, 2 ja 6 nagu nõutud.