Ülesandeid iseseisvaks tööks: 1. komplekt 2001/2002 õ.-a.

Tähtaeg: 4. jaanuar 2002

Komplekt A (ülesanded vanema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. On antud $2k+1$ täisarvust koosnev järjend $(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1})$. Sellest moodustatakse uus järjend $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{2}, \frac{a_{2k+1}+a_1}{2}\right)$. Analoogiliselt saadakse teisest järjendist kolmas ning niiviisi jätkatakse lõpmatult. Tõesta, et kui kõik saadavad järjendid koosnevad ainult täisarvudest, siis $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2k+1}$.

2. Olgu ABC suvaline kolmnurk ja T punkt selle kolmnurga tasandil. Olgu P selline punkt sirgel AB, et sirged TP ja AB on risti; Q selline punkt sirgel AC, et sirged TQ ja AC on risti; R selline punkt sirgel TC, et sirged AR ja TC on risti, ning S selline punkt sirgel TB, et sirged AS ja TB on risti. Tõesta, et sirgete PR ja SQ lõikepunkt X paikneb sirgel BC.

3. Tasandil on antud kuus punkti: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 ja B_3. Tõesta, et kui kolmnurkade $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ ja $B_1A_2A_3$ ümberringijooned lõikuvad ühes punktis, siis kolmnurkade $B_1B_2A_3$, $B_1A_2B_3$ ja $A_1B_2B_3$ ümberringjooned lõikuvad samuti ühes punktis.

4. Kui paljude naturaalarvude n korral, kus $1 \leqslant n \leqslant N = 1990^{1990}$, on arvud $n^2 - 1$ ja N ühistegurita?

5. a) Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral arv $n^{37} - n$ jagub 91-ga.
   b) Leia suurim positiivne täisarv k, mis on arvu $n^{37} - n$ jagajaks mistahes positiivse täisarvu n korral.

6. Leia kõik positiivsed täisarvud N, mille kõigi erinevate positiivsete jagajate (1 ja N kaasa arvatud) summa ei ületa arvu $(\sqrt{N}+1)^2$.

7. Tähistagu $\sigma(N)$ positiivse täisarvu N kõigi erinevate positiivsete jagajate summat. Tõesta, et kui $\sigma(N) = 2N+1$, siis N on mingi paaritu täisarvu ruut.

8. Defineerime arvud $c_{n,k}$ (kus $n \geqslant k \geqslant 0$) järgmiste rekurrentsete seostega:
   (i) $c_{n,0} = c_{n,n} = 1$ iga $n \geqslant 0$ korral;
   (ii) $c_{n+1,k} = 2^k c_{n,k} + c_{n,k-1}$ iga $n \geqslant 1$ ja $1 \leqslant k \leqslant n$ korral.

   Tõesta, et $c_{n,k} = c_{n,n-k}$ iga $n \geqslant 0$ ja $0 \leqslant k \leqslant n$ korral.

Komplekt B (ülesanded noorema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Matemaatikaõhtul mängiti järgmist mängu. Mängijatele A ja B öeldi kummalegi üks naturaalarv, kusjuures A ei teadnud B arvu ning B ei teadnud A arvu, kuid mõlemad teadsid, et need kaks arvu on järjestikused. Seejärel arenes järgmine dialoog:
   A: Ma ei tea, mis arv sul on.
   B: Ma ei tea, mis arv sul on.
   A: Ma ei tea, mis arv sul on.
   B: Ma ei tea, mis arv sul on.
   A: Ma ei tea, mis arv sul on.
   ...
   Kümme korda ütles A, et ta ei tea, mis arv B-l on, ja kümme korda vastas B, et ka tema ei tea, mis arv A-l on. Seejärel aga ütles A ootamatult: "Ma tean, mis sinu arv on". Millised võisid olla A-le ja B-le öeldud arvud?

2. Iga kolmekohalise täisarvu n jaoks leiame uue arvu $f(n)$, mis on võrdne arvu n kolme numbri, nende numbrite paarikaupa korrutiste ja kõigi kolme numbri korrutise summaga (näiteks, kui $n = 625$, siis $f(n) = 6 + 2 + 5 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 5$.) Leia kõik sellised kolmekohalised täisarvud n, mille korral $f(n) = n$.

3. Olgu a, b ja c sellised reaalarvud, et
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\,.$$
   Tõesta, et arvude a, b ja c hulgas on vähemalt kaks võrdset.

4. Tõesta, et kolmnurga ABC tipu A neli ristprojektsiooni nurkade $\angle ABC$ ja $\angle BCA$ sisenurkade ja välisnurkade poolitajatele asuvad ühel sirgel.

5. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ja T tema selline sisepunkt, et $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Olgu M, N ja P punkti T projektsioonid vastavalt külgedele BC, CA ja AB. Kolmnurga MNP ümberringjoon lõikab sirgeid BC, CA ja AB teistkordselt vastavalt punktides M', N' ja P'. Tõesta, et kolmnurk $M'N'P'$ on võrdkülgne.

6. Leia võrrandi $4x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 12x + 9 = 0$ kõik reaalarvulised lahendid.

7. Olgu $P(x)$ suvaline täisarvuliste kordajatega polünoom. Tõesta, et mistahes täisarvude m ja n korral on $P(m - \sqrt{n}) + P(m + \sqrt{n})$ samuti täisarv.

8. Olgu a ja b suvalised täisarvud. Tõesta, et arv $a^2 + 9ab + b^2$ jagub 11-ga parajasti siis, kui a ja b annavad 11-ga jagamisel ühe ja sama jäägi.

9. Leia kõik paarid (a, q), kus a on täisarv, q algarv ning $a^2 - 2q^2 = 1$.

10. Tõesta, et Mersenne'i arvud on paarikaupa ühistegurita. (Mersenne'i arvudeks nimetame arve kujul $2^p - 1$, kus p on algarv.)