Ülesandeid iseseisvaks tööks: 1. komplekt 2001/2002 õ.-a.

Ülesannete lahendused

Komplekt A (ülesanded vanema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. On antud $2k+1$ täisarvust koosnev järjend $(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1})$. Sellest moodustatakse uus järjend $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{2}, \frac{a_{2k+1}+a_1}{2}\right)$. Analoogiliselt saadakse teisest järjendist kolmas ning niiviisi jätkatakse lõpmatult. Tõesta, et kui kõik saadavad järjendid koosnevad ainult täisarvudest, siis $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2k+1}$.

   Lahendus. Paneme tähele, et kui esialgses järjendis ei ole kõik elemendid võrdsed, peab mingi arvu sammude järel järjendi minimaalne element kasvama, maksimaalne element aga kahanema (kui esialgses järjendis on k võrdset minimaalset elementi, siis k sammu järel saadava järjendi minimaalne element on suurem esialgse järjendi minimaalsest elemendist; analoogiline väide kehtib maksimaalse elemendi kohta). Et kahe etteantud täisarvu vahel on ainult lõplik arv täisarve, siis juhul, kui kõigi saadavate järjendite kõik elemendid on täisarvud, peavad järjendi minimaalne ja maksimaalne element mingi arvu sammude järel saama võrdseteks. Näitame, et see ei ole võimalik, s.t. kui esialgses järjendis ei olnud kõik elemendid võrdsed, siis ka ühelgi sammul ei teki järjendit, mille kõik elemendid on võrdsed.

   Oletame vastuväiteliselt, et n. sammul saadakse esmakordselt järjend, mille kõik elemendid on võrdsed. Olgu $(n-1)$. sammul saadud järjend $(b_1, b_2, \ldots, b_{2k+1})$, siis

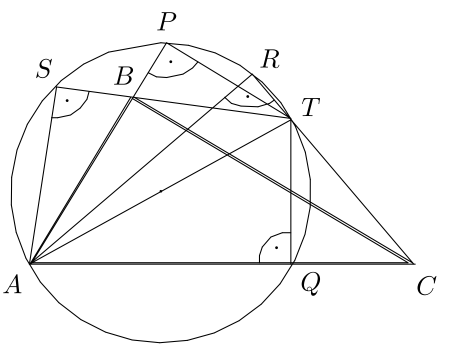
   $$\frac{b_1+b_2}{2} = \frac{b_2+b_3}{2} = \ldots = \frac{b_{2k}+b_{2k+1}}{2} = \frac{b_{2k+1}+b_1}{2},$$

   kust

   $$b_1 = b_3 = b_5 = ... = b_{2k+1} = b_2 = b_4 = \ldots = b_{2k}.$$

   Saadud tulemus on vastuolus tehtud eeldusega, et järjend, mille kõik elemendid on võrdsed, tekkis esmakordselt n. sammul.

2. Olgu ABC suvaline kolmnurk ja T punkt selle kolmnurga tasandil. Olgu P selline punkt sirgel AB, et sirged TP ja AB on risti; Q selline punkt sirgel AC, et sirged TQ ja AC on risti; R selline punkt sirgel TC, et sirged AR ja TC on risti, ning S selline punkt sirgel TB, et sirged AS ja TB on risti. Tõesta, et sirgete PR ja SQ lõikepunkt X paikneb sirgel BC.



Joonis 1

   Lahendus. Et vastavalt ülesande tingimustele

   $$\angle AST = \angle APT = \angle ART = \angle AQT = 90^\circ,$$

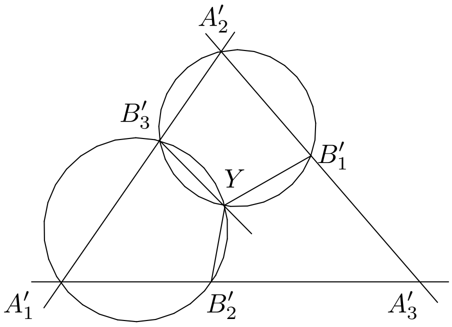
siis punktid A, S, P, R, T ja Q paiknevad ühel ringjoonel diameetriga AT (vt. joonist 1). Meil on vaja tõestada, et sirgete AP ja ST lõikepunkt B, sirgete QA ja RT lõikepunkt C ning sirgete PR ja SQ lõikepunkt X paiknevad ühel sirgel. See aga järeldub otseselt Pascali teoreemist, mille väide üldkujul on: kui koonuselõikel (ringjoonel, ellipsil, paraboolil või hüperboolil) võtta suvalised kuus punkti ja ühendada need mingis järjekorras kuusnurgaks (see võib olla ka iseennast lõikav), siis selle kuusnurga kolme paari vastaskülgede lõikepunktid asuvad ühel sirgel.

3. Tasandil on antud kuus punkti: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 ja B_3. Tõesta, et kui kolmnurkade $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ ja $B_1A_2A_3$ ümberringjooned lõikuvad ühes punktis, siis kolmnurkade $B_1B_2A_3$, $B_1A_2B_3$ ja $A_1B_2B_3$ ümberringjooned lõikuvad samuti ühes punktis.

Lahendus. Lõikugu kolmnurkade $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ ja $B_1A_2A_3$ ümberringjooned punktis X. Inversioonil keskpunktiga X teisenduvad need ringjooned sirgeteks, kusjuures punktide A_1, A_2 ja A_3 kujutised A_1', A_2' ja A_3' on nende sirgete lõikepunktideks ning punktide B_1, B_2 ja B_3 kujutised B_1', B_2' ja B_3' paiknevad vastavalt sirgetel $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ ja $A_1'A_2'$ (joonisel 2 on kujutatud erijuht, kus punktid B_1', B_2' ja B_3' paiknevad vastavalt *lõikudel* $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ ja $A_1'A_2'$).
Nüüd piisab tõestada, et kolmnurkade $B_1'B_2'A_3'$, $B_1'A_2'B_3'$ ja $A_1'B_2'B_3'$ ümberringjooned lõikuvad ühes punktis. Olgu Y kolmnurkade $B_1'A_2'B_3'$ ja $A_1'B_2'B_3'$ ümberringjoonte lõikepunkt: on vaja näidata, et ka kolmnurga $B_1'B_2'A_3'$ ümberringjoon läbib punkti Y, ehk joonisel 2 kujutatud juhul $B_1'YB_2'A_3'$ on kõõlnelinurk (kui mõni punktidest B_i' paikneb väljaspool vastavat lõiku $A_j'A_k'$, siis võivad punktid B_1', B_2', A_3' ja Y paikneda ringjoonel teistsuguses järjekorras). Selleks on vaja näidata, et $\angle B_1'YB_2' = 180^\circ - \angle B_1'A_3'B_2'$. Tõepoolest:

$$\angle B_1'YB_2' = (180^\circ - \angle B_1'YB_3') + (180^\circ - \angle B_3'YB_2') = \angle B_1'A_2'B_3' + \angle B_3'A_1'B_2' = \\ = 180^\circ - \angle B_1'A_3'B_2' .$$

Ülejäänud juhtudel, kus üks või rohkem punkte B_i' paikneb väljaspool vastavaid lõike $A_j'A_k'$, on tõestus analoogiline.



Joonis 2

4. Kui paljude naturaalarvude n korral, kus $1 \leqslant n \leqslant N = 1990^{1990}$, on arvud $n^2 - 1$ ja N ühistegurita?

Vastus: $591 \cdot 1990^{1989}$.

Lahendus. Arv $n^2 - 1$ on arvuga N ühistegurita parajasti juhul, kui ükski arvu N algteguritest 2, 5, 199 ei jaga arvu $n^2 - 1$. Olgu X kõigi arvust N mitte suuremate positiivsete täisarvude hulk ning koosnegu alamhulgad $A \subset X$, $B \subset X$ ja $C \subset X$ parajasti neist arvudest n, mille korral $n^2 - 1$ jagub vastavalt 2-ga, 5-ga ja 199-ga. Siis alamhulgad $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ ja $A \cap B \cap C$ koosnevad parajasti neist arvudest n, mille korral $n^2 - 1$ jagub vastavalt arvuga $2 \cdot 5 = 10$, $5 \cdot 199 = 995$, $2 \cdot 199 = 398$ ja $2 \cdot 5 \cdot 199 = 1990$.

Paneme tähele, et arv $n^2-1=(n+1)(n-1)$ jagub algarvuga 2 parajasti siis, kui mõlemad tegurid $n-1$, $n+1$ jaguvad selle algarvuga, s.t. kui $n \equiv 1 \pmod 2$, ning n^2-1 jagub algarvuga 5 või 199 parajasti siis, kui üks teguritest $n-1$, $n+1$ jagub selle algarvuga, s.t. vastavalt $n \equiv \pm 1 \pmod 5$ või $n \equiv \pm 1 \pmod{199}$. Seega n^2-1 jagub 10-ga või 398-ga parajasti siis, kui üks teguritest $n-1$, $n+1$ jagub vastavalt 10-ga või 398-ga, s.t. vastavalt $n \equiv \pm 1 \pmod{10}$ või $n \equiv \pm 1 \pmod{398}$, ning n^2-1 jagub 995-ga parajasti siis, kui üks teguritest $n-1$, $n+1$ jagub 995-ga (s.t. $n \equiv \pm 1 \pmod{995}$) või kui üks neist jagub 5-ga ja teine 199-ga (on lihtne kontrollida, et see tingimus on täidetud parajasti siis, kui $n \equiv \pm 399 \pmod{995}$). Lõpuks n^2-1 jagub 1990-ga parajasti siis, kui üks teguritest $n-1$, $n+1$ jagub 1990-ga (s.t. $n \equiv \pm 1 \pmod{1990}$) või kui üks neist jagub 10-ga ja teine 398-ga (see tingimus on täidetud parajasti siis, kui $n \equiv \pm 399 \pmod{1990}$).

Nüüd saame koostada järgmise tabeli:

Hulk	n määrav tingimus	Hulga elementide arv
X	—	N
A	$n \equiv 1 \pmod 2$	$\frac{N}{2}$
B	$n \equiv \pm 1 \pmod 5$	$\frac{2N}{5}$
C	$n \equiv \pm 1 \pmod{199}$	$\frac{2N}{199}$
$A \cap B$	$n \equiv \pm 1 \pmod{10}$	$\frac{2N}{10}$
$A \cap C$	$n \equiv \pm 1 \pmod{398}$	$\frac{2N}{398}$
$B \cap C$	$n \equiv \pm 1, \pm 399 \pmod{995}$	$\frac{4N}{995}$
$A \cap B \cap C$	$n \equiv \pm 1, \pm 399 \pmod{1990}$	$\frac{4N}{1990}$

Lõpuks leiame otsitava arvu:

$$\begin{aligned} m &= |X|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C| = \\ &= \frac{591N}{1990} = 591 \cdot 1990^{1989} . \end{aligned}$$

5. a) Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral arv $n^{37}-n$ jagub 91-ga.
b) Leia suurim positiivne täisarv k, mis on arvu $n^{37}-n$ jagajaks mistahes positiivse täisarvu n korral.

Vastus: b) 1919190.

Lahendus: a) Tegurdame: $91 = 7 \cdot 13$. Et Fermat' väikese teoreemi kohaselt mistahes algarvu p ja sellega mittejaguva positiivse täisarvu n korral $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, siis

$$n^{k(p-1)+1} = (n^{p-1})^k \cdot n \equiv n \pmod p ;$$

kui aga n jagub p-ga, siis on sama väite kehtivus ilmne. Kuna $37 \equiv 1 \pmod{p-1}$, kus $p=7$ või $p=13$, s.t. ta on esitatav kujul $37 = k(p-1)+1$, siis $n^{37}-n$ jagub nii 7-ga kui ka 13-ga ning järelikult jagub 91-ga.
b) Olgu $k = {p_1}^{l_1} \cdots {p_s}^{l_s}$, kus p_i on erinevad algarvud ja $l_i \geqslant 1$. Kui mingi algarvu p_i korral arv k jaguks arvuga p_i^2, siis oleks $p_i^{37} \equiv 0 \pmod{p_i^2}$, ent $p_i \not\equiv 0 \pmod{p_i^2}$ — seega sel juhul ei kehtiks võrdus $p_i^{37} \equiv p_i \pmod{p_i^2}$ ega ka mitte $p_i^{37} \equiv p_i \pmod k$. Niisiis $l_i = 1$ iga $i = 1, \ldots, s$ korral.

Näitame nüüd, et arvu k iga algteguri p_i korral $p_i - 1$ on arvu 36 jagaja. Kuna iga n korral $n^{37} \equiv n \pmod{k}$, siis iga n korral $n^{37} \equiv n \pmod{p_i}$. Siit saame, et iga algarvuga p_i mittejaguva n korral $n^{36} \equiv 1 \pmod{p_i}$, ehk $\mathrm{ord}_{p_i}(n)$ on arvu 36 jagaja ($\mathrm{ord}_{p_i}(n)$ on vähim positiivne täisarv m, mille korral $n^m \equiv 1 \pmod{p_i}$). On teada, et mistahes algarvulise mooduli p_i järgi leiduvad *algjuured* (arvud a, mille korral $\mathrm{ord}_{p_i}(a) = p_i - 1$). Võttes n rolli suvalise algjuure mooduli p_i järgi, saamegi, et $p_i - 1 = \mathrm{ord}_{p_i}(n)$ peab olema arvu 36 jagaja.

Niisiis k on selliste erinevate algarvude p_i korrutis, kus arvud $p_i - 1$ on arvu 36 jagajad. Niisugused algarvud on 2, 3, 5, 7, 13, 19 ja 37, s.t. suurim sobiv k on nende kõigi korrutis 1919190.

6. Leia kõik positiivsed täisarvud N, mille kõigi erinevate positiivsete jagajate (1 ja N kaasa arvatud) summa ei ületa arvu $(\sqrt{N}+1)^2$.

Vastus: kõik algarvud, algarvude ruudud ja arv 1.

Lahendus. Ilmselt $N = 1$ rahuldab ülesande tingimust: olgu edaspidi $N > 1$. On lihtne näha, et kui d on arvu N jagaja, siis ka $\dfrac{N}{d}$ on arvu N jagaja, ning kui $d \neq \sqrt{N}$, siis $d \neq \dfrac{N}{d}$.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus N ei ole täisruut, ning olgu $d_1, \ldots, d_m$ arvu N jagajad, mis on suuremad 1-st ega ületa arvu $\sqrt{N}$. Siis on $1, d_1, \ldots, d_m, \dfrac{N}{d_m}, \ldots, \dfrac{N}{d_1}, N$ arvu N erinevad jagajad. Et mistahes $d > 1$ korral $d + \dfrac{N}{d} > 2\sqrt{N}$, siis

$$
\begin{aligned}
1 + 2m\sqrt{N} + N &< 1 + \left(d_1 + \frac{N}{d_1}\right) + \ldots + \left(d_m + \frac{N}{d_m}\right) + N = \\
&= 1 + d_1 + \ldots + d_m + \frac{N}{d_1} + \ldots + \frac{N}{d_m} + N \leqslant (\sqrt{N}+1)^2 = 1 + 2\sqrt{N} + N ,
\end{aligned}
$$

millest $2m\sqrt{N} < 2\sqrt{N}$, ehk $m = 0$. Seega on arvu N ainsad jagajad 1 ja N, ehk N on algarv.

Olgu nüüd N täisruut ning olgu $1, d_1, \ldots, d_m, \sqrt{N}, \dfrac{N}{d_1}, \ldots, \dfrac{N}{d_m}, N$ tema erinevad jagajad. Analoogiliselt eelnevaga saame $m = 0$, s.t. arvu N ainsad jagajad on 1, $\sqrt{N}$ ja N, millest järeldub, et N on algarvu ruut.

Seega kokkuvõttes rahuldab arv N ülesande tingimust parajasti juhul, kui N on algarv, algarvu ruut või $N = 1$.

7. Tähistagu $\sigma(N)$ positiivse täisarvu N kõigi erinevate positiivsete jagajate summat. Tõesta, et kui $\sigma(N) = 2N + 1$, siis N on mingi paaritu täisarvu ruut.

Lahendus. Olgu N selline arv, mille korral $\sigma(N) = 2N + 1$. Kasutame valemit

$$
\sigma(N) = \prod_p (1 + p + p^2 + \ldots + p^{k_p}) ,
$$

kus korrutis võetakse üle arvu N kõigi algtegurite p ning k_p tähistab algarvu p astendajat N esituses algarvude astmete korrutisena. Kui p ja k_p on mõlemad paaritud, siis vastav tegur on paarisarv ning seega on $\sigma(N)$ paarisarv. Seega peavad arvu N esituses algarvude astmete korrutisena kõik paaritud algarvud p olema paarisarvuliste astendajatega k_p. Teisisõnu, $N = 2^a n^2$, kus n on mingi paaritu arv. Siit

$$
(2^{a+1} - 1) \cdot \sigma(n^2) = \sigma(N) = 2^{a+1} n^2 + 1
$$

(kasutasime tingimust $\sigma(N) = 2N + 1$).

Avaldades siit $n^2 = (2^{a+1}-1)\cdot(\sigma(n^2)-n^2)-1$, järeldame, et kui q on arvu $2^{a+1}-1$ mistahes algtegur, siis $n^2 \equiv -1 \pmod q$. Et aga -1 ei ole ruutjäägiks arvudele kujul $4r+3$, siis peab arvu $2^{a+1}-1$ mistahes algtegur olema kujul $4r+1$. See aga on võimatu, kui $a \geqslant 1$ (arvude $4r+1$ korrutis annab *modulo* 4 jäägi 1, mitte -1). Seega $a=0$ ning $N=n^2$ on paaritu täisruut.

8. Defineerime arvud $c_{n,k}$ (kus $n \geqslant k \geqslant 0$) järgmiste rekurrentsete seostega:
   (i) $c_{n,0} = c_{n,n} = 1$ iga $n \geqslant 0$ korral;
   (ii) $c_{n+1,k} = 2^k c_{n,k} + c_{n,k-1}$ iga $n \geqslant 1$ ja $1 \leqslant k \leqslant n$ korral.

   Tõesta, et $c_{n,k} = c_{n,n-k}$ iga $n \geqslant 0$ ja $0 \leqslant k \leqslant n$ korral.

Lahendus 1. Defineerime mistahes täisarvu $m \geqslant 1$ jaoks

$$f(m) = (2^1-1)\cdot(2^2-1)\cdot\ldots\cdot(2^m-1)$$

ning $f(0)=1$. Tähistame $n \geqslant 0$ ja $0 \leqslant k \leqslant n$ korral

$$a_{n,k} = \frac{f(n)}{f(k)f(n-k)}$$

ning näitame, et $a_{n,k} = c_{n,k}$. Et $a_{n,k} = a_{n,n-k}$ otse definitsiooni põhjal, siis on ülesande väide sellega tõestatud.
Tõestamaks, et mistahes n ja k korral $a_{n,k} = c_{n,k}$, veendume, et arvud $a_{n,k}$ rahuldavad samu seoseid (i) ja (ii), mille abil on defineeritud arvud $c_{n,k}$. Tõepoolest: $a_{n,0} = a_{n,n} = 1$ kehtivus on ilmne $a_{n,k}$ definitsioonist, ning kuna $f(m)(2^{m+1}-1) = f(m+1)$, siis

$$\begin{aligned}
2^k a_{n,k} + a_{n,k-1} &= 2^k \cdot \frac{f(n)}{f(k)f(n-k)} + \frac{f(n)}{f(k-1)f(n-k+1)} = \\
&= f(n)\cdot\frac{2^k(2^{n-k+1}-1)+(2^k-1)}{f(k)f(n-k+1)} = \\
&= \frac{f(n)(2^{n+1}-1)}{f(k)f(n-k+1)} = \\
&= a_{n+1,k}
\end{aligned}$$

mistahes $1 \leqslant k \leqslant n$ korral.

Lahendus 2. Teeme induktsiooni n järgi. Ilmselt kehtib väide $n=0$ korral (siis ka $k=0$): $c_{0,0} = c_{0,0-0} = 1$. Oletame nüüd, et

$$c_{m,j} = c_{m,m-j}$$

iga $m \leqslant n$ ja $0 \leqslant j \leqslant m$ korral. Ülesandes antud rekurrentse seose (ii) kohaselt

$$c_{n+1,k} = 2^k c_{n,k} + c_{n,k-1} \tag{1}$$

iga k korral (defineerides täiendavalt $c_{n,k}=0$, kui $k<0$ või $k>n$, võime veenduda, et see seos kehtib ka ilma piiranguta $1 \leqslant k \leqslant n$) ning

$$\begin{aligned}
c_{n+1,n+1-k} &= 2^{n+1-k}c_{n,n+1-k} + c_{n,n-k} = \\
&= 2^{n+1-k}c_{n,k-1} + c_{n,k}\,.
\end{aligned}$$

Niisiis jääb üle näidata, et

$$(2^k-1)c_{n,k} = (2^{n+1-k}-1)c_{n,k-1}\,.$$

Induktsiooni eeldusest ning samasusest (1) saame, et

$$(2^k-1)c_{n-1,k} = (2^{n-k}-1)c_{n-1,k-1} \tag{2}$$

ning analoogiliselt

$$(2^{k-1}-1)c_{n-1,k-1} = (2^{n-k+1}-1)c_{n-1,k-2}\ . \qquad (3)$$

Seetõttu

$$\begin{aligned}
(2^k-1)c_{n,k} - (2^{n+1-k}-1)c_{n,k-1} &= \\
&= (2^k-1)(2^k c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1}) - (2^{n+1-k}-1)(2^{k-1}c_{n-1,k-1} + c_{n-1,k-2}) = \\
&= 2^k(2^{n-k}-1)c_{n-1,k-1} + (2^k-1)c_{n-1,k-1} - \\
&\quad - (2^{n+1-k}-1)(2^{k-1}c_{n-1,k-1} + c_{n-1,k-2}) = \\
&= (2^n - 2^k + 2^k - 1 - 2^n + 2^{k-1})c_{n-1,k-1} - (2^{n+1-k}-1)c_{n-1,k-2} = \\
&= (2^{k-1}-1)c_{n-1,k-1} - (2^{n+1-k}-1)c_{n-1,k-2} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

(siin esimesel sammul kasutasime (1), teisel sammul (2) ja viimasel sammul (3).

Komplekt B (ülesanded noorema rühma sessiooni läbiviijatelt)

1. Matemaatikaõhtul mängiti järgmist mängu. Mängijatele A ja B öeldi kummalegi üks naturaalarv, kusjuures A ei teadnud B arvu ning B ei teadnud A arvu, kuid mõlemad teadsid, et need kaks arvu on järjestikused. Seejärel arenes järgmine dialoog:

   A: Ma ei tea, mis arv sul on.
   B: Ma ei tea, mis arv sul on.
   A: Ma ei tea, mis arv sul on.
   B: Ma ei tea, mis arv sul on.
   A: Ma ei tea, mis arv sul on.
   ...
   Kümme korda ütles A, et ta ei tea, mis arv B-l on, ja kümme korda vastas B, et ka tema ei tea, mis arv A-l on. Seejärel aga ütles A ootamatult: "Ma tean, mis sinu arv on". Millised võisid olla A-le ja B-le öeldud arvud?

   Vastus: A arv oli 20 ja B arv 21 või A arv 21 ja B arv 22.

   Lahendus. Et A esimesel korral B arvu ei teadnud, siis ei olnud A enda arv 1 (muidu oleks B arv saanud olla ainult 2 ja A oleks seda teadnud). Et B seejärel A arvu ei teadnud, siis ei olnud B arv 1 ega 2 (et A arv ei olnud 1, siis pidanuks see neil juhtudel olema vastavalt 2 või 3 ning B oleks seega A arvu teadnud).

   Et A ka teisel korral ütles, et ta B arvu ei tea, ning eelnevalt oli selgunud, et B arv ei ole 1 ega 2, siis ei saanud A enda arv olla lisaks 1-le ka 2 ega 3 — muidu oleks B arv pidanud olema vastavalt 3 või 4 ja A oleks seda teadnud. Et ka B teisel korral endiselt A arvu ei teadnud ning eelnevalt oli selgunud, et A arv ei ole 1, 2 ega 3, siis ei saanud B olla lisaks 1-le ja 2-le ka 3 ega 4 — muidu oleks A arv pidanud olema vastavalt 4 või 5 ja B oleks seda teadnud. Niiviisi arutlust jätkates järeldame sellest, et A ka kümnendal korral B arvu ei teadnud, et A arv ei ole $2\cdot 10 - 1 = 19$ ega väiksem, ning sellest, et B kümnendal korral A arvu ei teadnud, et A arv ei ole $2\cdot 10 = 20$ ega väiksem. Et aga A üheteistkümnendal korral B arvu teadis, pidi A enda arv olema 20 või 21 ning B arv vastavalt 21 või 22.

   Märkus. Ülaltoodud arutlus lähtub eeldusest, et vähim naturaalarv on 1. Kui ka 0 lugeda naturaalarvuks, siis tuleb selles arutluses kõik arvud asendada 1 võrra väiksematega ning võimalikeks A-le ja B-le öeldud arvudeks saame siis $(19,20)$ ja $(20,21)$.

2. Iga kolmekohalise täisarvu n jaoks leiame uue arvu $f(n)$, mis on võrdne arvu n kolme numbri, nende numbrite paarikaupa korrutiste ja kõigi kolme numbri korrutise summaga (näiteks, kui $n = 625$, siis $f(n) = 6+2+5+6\cdot 2+6\cdot 5+2\cdot 5+2\cdot 6\cdot 5$.) Leia kõik sellised kolmekohalised täisarvud n, mille korral $f(n) = n$.

Vastus: 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899 ja 999.

Lahendus. Olgu $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, siis võrdusest $f(n) = n$ saame

$$a + b + c + ab + bc + ca + abc = 100a + 10b + c$$

ehk

$$b \cdot (9 - c) = a \cdot (bc + b + c - 99) .$$

Et $b \leqslant 9$ ja $c \leqslant 9$, siis $9 - c \geqslant 0$ ja $bc + b + c - 99 \leqslant 0$. Kuna $b \geqslant 0$ ja $a > 0$, siis saame ainsaks võimaluseks $bc + b + c - 99 = 0$, kust $b = c = 9$; arvu esimene number a võib seejuures olla suvaline, välja arvatud 0.

3. Olgu a, b ja c sellised reaalarvud, et

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} .$$

Tõesta, et arvude a, b ja c hulgas on vähemalt kaks võrdset.

Lahendus. Viies kõik murrud ühisele nimetajale, saame

$$a^2c + b^2a + c^2b = b^2c + c^2a + a^2b ,$$

ehk

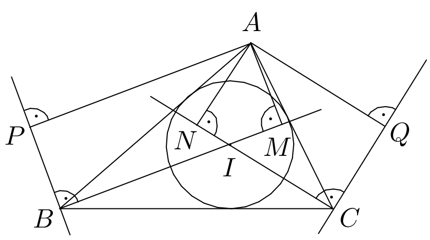
$$ac^2 - bc^2 + a^2b - b^2a - a^2c + b^2c = 0 .$$

Selle võrduse vasakut poolt teisendades saame

$$\begin{aligned} ac^2 - bc^2 + a^2b - b^2a - a^2c + b^2c &= (a - b)c^2 + (a - b)ab - (a^2 - b^2)c = \\ &= (a - b)(c^2 + ab - ac - bc) = (a - b)(b - c)(a - c) . \end{aligned}$$

Niisiis kehtib võrdus $(a - b)(b - c)(a - c) = 0$, kust $a = b$, $b = c$ või $a = c$.

4. Tõesta, et kolmnurga ABC tipu A neli ristprojektsiooni nurkade ABC ja BCA sisenurkade ja välisnurkade poolitajatele asuvad ühel sirgel.



Joonis 3

Lahendus. Olgu punkti A ristprojektsioonid nurga ABC sisenurga ja välisnurga poolitajale vastavalt M ja P ning ristprojektsioonid nurga BCA sisenurga ja välisnurga poolitajale vastavalt N ja Q (vt. joonist 3). Tõestame, et punkt P asub sirgel MN; punkti Q asumine samal sirgel tõestatakse analoogiliselt.
Kuna $\angle APB = \angle AMB = 90^\circ$, siis $APBM$ on kõõlnelinurk (tegelikult isegi ristkülik) ning

$$\angle AMP = \angle ABP = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{\angle CAB}{2} + \frac{\angle BCA}{2} .$$

Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt. Kuna $\angle ANI = \angle AMI = 90°$, siis ka $ANIM$ on kõõlnelinurk ning järelikult $\angle AMN = \angle AIN$. Kuna nurk AIN on kolmnurga AIC välisnurk, saame

$$\angle AIN = 180° - \angle AIC = \frac{\angle CAB}{2} + \frac{\angle BCA}{2}\ .$$

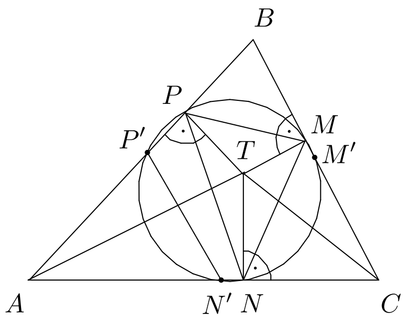
niisiis $\angle AMP = \angle AIN = \angle AMN$ ja seega asub punkt P sirgel MN.

5. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ja T tema selline sisepunkt, et $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Olgu M, N ja P punkti T projektsioonid vastavalt külgedele BC, CA ja AB. Kolmnurga MNP ümberringjoon lõikab sirgeid BC, CA ja AB teistkordselt vastavalt punktides M', N' ja P'. Tõesta, et kolmnurk $M'N'P'$ on võrdkülgne.

Lahendus. Vastavalt ülesande tingimustele on $APTN$ kõõlnelinurk ning seega $\angle APN = \angle ATN$ (vt. joonist 4). Et punktid P, N', N ja P' paiknevad ühel ringjoonel ning A on sirgete PP' ja NN' lõikepunkt, siis $\angle AN'P' = \angle APN$. (Miks see kehtib sõltumata sellest, kummal pool on punkt P' punktist P ja punkt N' punktist N?)
Analoogiliselt saame võrdused $\angle CN'M' = \angle CMN = \angle CTN$. Järelikult

$$\angle AN'P' + \angle CN'M' = \angle ATN + \angle CTN = \angle ATC = 120°$$

ja $\angle P'N'M' = 180° - 120° = 60°$. Samamoodi tõestame, et $\angle N'M'P' = \angle N'P'M' = 60°$, seega on kolmnurk $M'N'P'$ võrdkülgne.



Joonis 4

6. Leia võrrandi $4x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 12x + 9 = 0$ kõik reaalarvulised lahendid.

Vastus: $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$.

Lahendus. Teisendame võrrandi vasakut poolt:

$$\begin{aligned} &4x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 12x + 9 = \\ &\quad = 4x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 3x^2 + 12x + 9 = \\ &\quad = (x^2 - 3) \cdot (4x^2 - 4x - 3)\ . \end{aligned}$$

Võrrandi $x^2 - 3 = 0$ lahenditeks on $\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$ ning võrrandi $4x^2 - 4x - 3 = 0$ lahenditeks on $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{3}{2}$.

7. Olgu $P(x)$ suvaline täisarvuliste kordajatega polünoom. Tõesta, et mistahes täisarvude m ja n korral on $P(m - \sqrt{n}) + P(m + \sqrt{n})$ samuti täisarv.

Lahendus. Konstantse või esimese astme polünoomi $P(x)$ korral on ülesande tingimus ilmselt täidetud. Olgu edaspidi $P(x)$ vähemalt teise astme polünoom. Vaatleme polünoomi $g(x) = x^2 - 2mx + m^2 - n$, mille nullkohad on $x_1 = m - \sqrt{n}$ ja $x_2 = m + \sqrt{n}$. Et polünoomi $P(x)$ aste on vähemalt 2, siis leiduvad polünoomid $q(x)$ ja $r(x)$ nii, et $P(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, kusjuures $r(x)$ on ülimalt esimese astme polünoom, s.t. $r(x) = cx + d$. Kuna nii $P(x)$ kui ka $g(x)$ on täisarvuliste kordajatega ja $g(x)$ pealiikme kordaja on 1, siis on ka $q(x)$ ning $r(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoomid. See tähendab, et kordajad c ja d on täisarvud ning

$$P(m - \sqrt{n}) + P(m + \sqrt{n}) = c(m - \sqrt{n}) + d + c(m + \sqrt{n}) + d = 2(cm + d)$$

on täisarv.

8. Olgu a ja b suvalised täisarvud. Tõesta, et arv $a^2 + 9ab + b^2$ jagub 11-ga parajasti siis, kui a ja b annavad 11-ga jagamisel ühe ja sama jäägi.

Lahendus. Paneme tähele, et

$$a^2 + 9ab + b^2 \equiv a^2 + 9ab + b^2 - 11ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \pmod{11} .$$

Järelikult $a^2 + 9ab + b^2$ jagub 11-ga siis ja ainult siis, kui $(a - b)^2$ jagub 11-ga, ehk (kuna 11 on algarv) siis ja ainult siis, kui $a - b$ jagub 11-ga.

9. Leia kõik paarid (a, q), kus a on täisarv, q algarv ning $a^2 - 2q^2 = 1$.

Vastus: $(3, 2)$ ja $(-3, 2)$.

Lahendus. Olgu (a, q) paar, mis rahuldab ülesande tingimusi. Siis $a^2 - 1 = 2q^2$ on paarisarv ning a^2 ja a seega paaritud arvud. Kui $a \equiv 1 \pmod 8$, siis $a^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod 8$. Kui $a \equiv 3 \pmod 8$, siis $a^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$. Kui $a \equiv 5 \pmod 8$ või $a \equiv 7 \pmod 8$, siis $a^2 = (-a)^2 \equiv (8-a)^2 \equiv 1 \pmod 8$ juba tehtu põhjal. Kokkuvõttes saime, et $a^2 - 1 = 2q^2$ jagub 8-ga ning seega q^2 jagub 4-ga ja q on paarisarv. Järelikult $q = 2$ ja võrrandi $a^2 - 1 = 2 \cdot 2^2$ ainsate lahenditena saame $a = 3$ ja $a = -3$, mis ka mõlemad sobivad.

10. Tõesta, et Mersenne'i arvud on paarikaupa ühistegurita. (Mersenne'i arvudeks nimetame arve kujul $2^p - 1$, kus p on algarv.)

Lahendus. Tähistagu $x \perp y$, et arvud x ja y on ühistegurita. Olgu p ja q suvalised erinevad algarvud ning üldisust kitsendamata olgu $p > q$. Eeldame, et mistahes selliste algarvude $p' \neq q'$ korral, kus $\max(p', q') < p$, on $2^{p'} - 1 \perp 2^{q'} - 1$ (ilmselt kehtib see väide vähimate algarvude 2 ja 3 jaoks, seega induktsiooni baas on olemas). Siis

$$\begin{aligned} \text{SÜT}\,(2^p - 1, 2^q - 1) &= \text{SÜT}\,((2^p - 1) - (2^q - 1), 2^q - 1) = \text{SÜT}\,(2^p - 2^q, 2^q - 1) \\ &= \text{SÜT}\,(2^q(2^{p-q} - 1), 2^q - 1). \end{aligned}$$

Et $2^q \perp 2^q - 1$ ning $p - q < p$ ja $q < p$ tõttu $\max(p - q, q) < p$, siis

$$\text{SÜT}\,(2^q(2^{p-q} - 1), 2^q - 1) = \text{SÜT}\,(2^{p-q} - 1, 2^q - 1) = 1.$$

Kokkuvõttes $2^p - 1 \perp 2^q - 1$. Matemaatilise induktsiooni printsiibi kohaselt oleme seega näidanud, et $2^p - 1 \perp 2^q - 1$ kehtib mistahes erinevate algarvude p ja q korral.