

Ülesandeid iseseisvaks tööks: 3. komplekt

Tähtaeg: 10. märts 2001

1. Kinnise iseennast mittelõikava murdjoone $ABCDEFGHA$ tipud A, B, C, D, E, F, G ja H paiknevad mingi kuubi erinevates tippudes. Tõesta, et vähemalt üks selle murdjoone lülidest $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH$ ja HA on kuubi serv.
2. Tõesta, et jada $a_n = 2^{n+1} - 3$, $n = 1, 2, 3, \dots$ sisaldab lõpmata palju 5-ga jaguvaid liikmeid ja lõpmata palju 13-ga jaguvaid liikmeid, ent ei sisalda ühtki liiget, mis jaguks nii 5-ga kui ka 13-ga.
3. Kolmnurgas ABC on $|AB| = |BC|$ ja $\angle B = 20^\circ$. Tõesta trigonomeetrilisi funktsioone kasutamata, et $2|AC| < |AB| < 3|AC|$.
4. Leia selliste arvtelje vahemike pikkuste summa, millel kehtib võrratus

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} > 1.$$

5. Ringjoonele kirjutatakse neli täisarvu. Seejärel asendatakse igal sammul ringjoonel olevad arvud — olgu need päripäeva lugedes a, b, c ja d — vastavalt vahedega $a - b, b - c, c - d$ ja $d - a$. Kas 2001 sellise asenduse järel võivad ringjoonel olla niisugused arvud x, y, z ja w , et $|xy - zw|, |xz - yw|$ ja $|xw - yz|$ on kõik algarvud?
6. Olgu H mitte-täisnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurkade ABH, BCH ja CAH ümberringjooned on võrdse raadiusega.
7. Tähistagu \mathbb{N} kõigi positiivsete täisarvude hulka. Funktsioon $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rahuldab iga positiivse täisarvu n korral tingimust $f(f(n)) = f(n) + f(n + 1)$.
 - a) Tõesta, et funktsioon f on üksühene (s.t. sellest, et $f(k) = f(m)$, järeldub, et $k = m$).
 - b) Leia üks niisugune funktsioon f .
8. Tähistagu $\alpha(n)$ numbrite 1 arvu positiivse täisarvu n kahendesituses. Tõesta, et
 - a) mistahes positiivse täisarvu n korral kehtib võrratus $\alpha(n^2) \leq \frac{1}{2} \alpha(n)(\alpha(n) + 1)$;
 - b) leidub lõpmata palju selliseid positiivseid täisarve n , mille korral $\alpha(n^2) = \frac{1}{2} \alpha(n)(\alpha(n) + 1)$.
9. Tõesta, et leiduvad sellised 2001 järjestikust positiivset täisarvu, millest igauks jagub mingi ühest suurema täisarvu 2001. astmega.
10. Ringjoone punktid värvitakse mingil viisil 2001 värviga. Tõesta, et mistahes $n \geq 3$ korral leidub lõpmata palju kongruentseid n -nurki, mille kõik tipud paiknevad sellel ringjoonel ning on kõik ühte ja sama värvi.