

Ülesandeid iseseisvaks tööks: 2. komplekt

Tähtaeg: 12. veebruar 2001

1. Leia suurim paarisarv, mis ei esitu kahe paaritu kordarvu summana.
2. Olgu (a, b, c) Pythagorase kolmik, st a, b, c on positiivsed täisarvud ja $a^2 + b^2 = c^2$. Tõesta, et arv $ab(b^2 - a^2)$ jagub 84-ga.
3. Tõesta, et iga ratsionaalarv r , $0 < r < 1$, esitub lõpliku summana erinevate naturaalarvude pöördväärtustest.
4. Poolringjoonel diameetriga AB võetakse punktid C ja D nii, et $ABCD$ on nelinurk. Olgu S lõikude AC ja BD lõikepunkt ning T punktist S lõigule AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tõesta, et ST on nurga CTD poolitaja.
5. Ringjoone kõõlu PQ otspunktidest tõmmatakse ristlõigud selle ringjoone diameetritele AB . Olgu R ja S nende ristlõikude aluspunktid ning T kõõlu PQ keskpunkt.
 - a) Tõesta, et kolmnurk RST on võrdhaarne.
 - b) Tõesta, et kolmnurk RST on võrdkülgne parajasti siis, kui kõõlu PQ pikkus on võrdne ringjoone raadiusega.
6. Kolmnurgas ABC on $\angle A = 120^\circ$ ning D, E ja F on vastavalt nurga A, B ja C poolitajate lõikepunktid vastaskülgedega. Tõesta, et kolmnurk FDE on täisnurkne.
7. Juku joonistas tasandile kinnise ennast mittelõikava kõverjoone, mille sisse jääva tasandiosa pindala on suurem kui 1. Tõesta, et tasandile saab paigutada koordinaatteljed nii, et see tasandiosa sisaldaks vähemalt kaks täisarvuliste koordinaatidega punkti.
8. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, mis rahuldavad tingimusi:
 - a) $f(f(a)) = f(f(a + 2) + 2) = a$ iga täisarvu a korral;
 - b) $f(0) = 1$.
9. Reaalrvude jada esimesed kolm liiget on $a_1 = 2$, $a_2 = 500$ ja $a_3 = 2000$ ning mistahes $n \geq 2$ korral kehtib võrdus

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}.$$

Tõesta, et selle jada kõik liikmed on positiivsed täisarvud ning a_{2001} jagub arvuga 2^{2001} .

10. Olgu x_1, \dots, x_{2n+1} sellised reaalarvud, et iga $k = 2, 3, \dots, 2n$ korral kehtib võrratus

$$x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} \geq 0.$$

Tõesta, et

$$\frac{x_1 + x_3 + \dots + x_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{x_2 + x_4 + \dots + x_{2n}}{n}.$$