

Ülesandeid iseseisvaks tööks: 1. komplekt

Tähtaeg: 20. detsember 2000

1. Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{5n-1} \leq 2\frac{1}{12}.$$

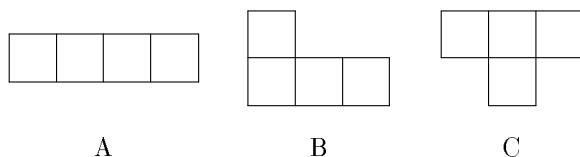
2. Olgu a ja b positiivsed täisarvud ning olgu n arvude a ja b vähima ühiskordse positiivne jagaja. Tõesta, et leiduvad sellised ühistegurita täisarvud s ja t , et $st = n$ ning s on arvu a jagaja ja t on arvu b jagaja.

3. Olgu n naturaalarv ja p algarv ning olgu s arvu n p -ndsüsteemis esituse numbrite summa. Tõesta, et algarvu p astendaja arvu $n!$ algteguriteks lahutuses on $\frac{n-s}{p-1}$. (Kirjutis $n!$ tähistab korrutist $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.)

4. Kolmnurga ABC ümberringjoonel paiknevast punktist P tõmmatakse ristlõigud kolmnurga külgedega määratud sirgetele. Tõesta, et nende ristlõikude aluspunktid paiknevad ühel sirgel.

5. Tõesta, et

- 8×8 ruudustikku ei saa tükeldada 15-ks joonisel näidatud tükiks A ja üheks tükiks B;
- 10×10 ruudustikku ei saa tükeldada ainult tükikideks C;
- 102×102 ruudustikku ei saa tükeldada ainult tükikideks A.



6. Jadas $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ on esimene element a_1 suvaliselt valitud positiivne täisarv ning iga järgmine element on määratud seosega

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999.$$

Tõesta, et selle jada elementide hulgas on ülimalt üks täisruut.

7. Leia avaldise $\sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ vähim võimalik väärtus.

8. Kolmnurga ABC küljel AC võetakse punkt K ja mediaanil BD punkt P nii, et kolmnurkade APK ja BPC pindalad on võrdsed. Leia sirgete AP ja BK lõikepunktide geomeetriline koht.

9. Tõesta, et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3}$$

mistahes positiivsete reaalarvude a , b ja c korral.

10. Kilplaste riigi linnad on ühendatud ühesuunalise liiklusega maanteedega. On teada, et mistahes kahe linna korral on siiski võimalik ühest neist teise sõita (aga mitte tingimata mõlemat pidi). Tõesta, et kilplaste riigis leidub linn, millest on võimalik sõita kõikidesse teistesse linnadesse.