Koduseid ülesandeid IMO-2001 võistkonnale: 3. komplekt

Tähtaeg: 9. juuni 2001

1. Tõesta, et iga täisarvu $n > 1$ korral kehtib võrratus

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < n - n^{\frac{n-1}{n}} .$$

2. Mitmel erineval viisil on võimalik värvida korrapärase 12-nurga tipud sinise ja punase värviga nii, et ühelgi neist moodustuval korrapärasel hulknurgal ei oleks kõik tipud ühte värvi? (Kaht värvimist loeme erinevateks, kui kasvõi üks tipp on nende korral erinevat värvi.)

3. On antud kaks ristkülikut, millest esimese küljepikkused on a ja b ning teisel c ja d, kusjuures $a < c \leqslant d < b$ ja $ab < cd$. Tõesta, et esimest ristkülikut on võimalik paigutada teise sisse siis ja ainult siis, kui

$$(b^2 - a^2)^2 \leqslant (bd - ac)^2 + (bc - ad)^2 .$$

4. Ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_1$, mille keskpunktid on vastavalt O_1 ja O_2, puutuvad teineteist väliselt punktis D ning kolmas ringjoon $\mathcal{C}$ puutub neid mõlemaid väliselt. Olgu s ringjoontele $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_1$ punktis D tõmmatud ühine puutuja ning AB ringjoone $\mathcal{C}$ diameeter, mis on risti sirgega s, kusjuures punktid O_1 ja A on sirgest s samal pool. Tõesta, et sirged AO_2, BO_1 ja s lõikuvad ühes punktis.

5. Leia suurim positiivne täisarv n, mille jaoks leiduvad sellised mittenegatiivsed täisarvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et ühegi kordajate $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ komplekti korral, mis kõik kuuluvad hulka $\{-1, 0, 1\}$ ning ei ole kõik nullid, ei jagu arv $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n$ arvuga n^3.

6. Juku joonistab paberile n sinist ja n punast punkti, millest ükski kolmik ei ole ühel sirgel, ning tõmbab igast sinisest punktist lõigud kõigisse punastesse punktidesse. Miku joonistab oma paberile n sinist punkti $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ja $2n-1$ punast punkti $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$, millest ükski kolmik ei ole ühel sirgel, ning tõmbab igast punktist S_i lõigud punktidesse $P_1, \ldots, P_{2i-1}$. Tõesta, et mistahes $k = 1, 2, \ldots, n$ korral on Jukul ja Mikul ühepalju võimalusi valida oma jooniselt k lõiku, mis on paarikaupa ühiste otspunktideta.

7. Olgu BM ja CN kolmnurga ABC nurgapoolitajad (punktid M ja N paiknevad vastavalt kolmnurga külgedel AC ja AB). Kiir MN lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D. Tõesta, et

$$\frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|CD|} .$$

8. Olgu $n \geqslant 2$ täisarv ja

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$$

positiivsete täisarvuliste kordajatega polünoom, kusjuures $a_k = a_{n-k}$ iga $k = 1, 2, \ldots, n-1$ korral. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid positiivsete täisarvude paare (k, m), mille korral $P(k)$ jagub arvuga m ning $P(m)$ jagub arvuga k.