Koduseid ülesandeid IMO-2001 võistkonnale: 2. komplekt

Tähtaeg: 21. mai 2001

1. Olgu (a_n) selline jada, et iga $k > 1$ korral osajada $a_k, a_{2k}, a_{3k}, a_{4k}, \ldots$ koondub. Kas sellest järeldub, et ka jada (a_n) koondub?

2. Tõesta, et suvalisest nulle mitte sisaldavast viiekümnekohalisest kümnendsüsteemi arvust saab maha tõmmata osa numbreid nii, et järelejääv arv jagub arvuga 271.

3. Juku valis ühe suvalise reaalarvuliste kordajatega polünoomi $p(x)$ ning asus lahendama võrrandit $p(x) = 16$. Selgus, et sellel võrrandil on 11 erinevat reaalarvulist lahendit, võrrandi $p(x) = 11$ lahendamisel leidis ta aga 16 erinevat reaalarvulist lahendit. Tõesta, et vähemalt üks Juku poolt leitud 27-st arvust on võrrandi $p'(x) = 0$ lahendiks.

4. Leia võrrandi $\max(a, b) \cdot \max(c, 1998) = \min(a, c) \cdot \min(b, 1998)$ kõik positiivsed lahendid.

5. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} |x - y| - \dfrac{|x|}{x} = -1 \\ |2x - y| + |x + y - 1| + |x - y| + y - 1 = 0\,. \end{cases}$$

6. Tõesta, et kümne järjestikuse täisarvu seas on alati üks, mis on ülejäänutega ühistegurita.

7. Olgu $S = \{a(n) \mid a(n) = n^2 + n + 1, n \text{ on naturaalarv}\}$.
   a) Kas $a(n) \cdot a(n + 1) \in S$ iga naturaalarvulise n korral?
   b) Kas $a(n) \cdot a(k) \in S$ iga naturaalarvulise n ja k korral?

8. Kolmnurgas ABC on $|AC| = |BC|$. Punkt P on kolmnurga ABC selline sisepunkt, et $\angle PAB = \angle PBC$. Olgu M lõigu AB keskpunkt. Tõesta, et $\angle APM + \angle BPC = 180°$.