Koduseid ülesandeid IMO-2001 võistkonnale: 1. komplekt

Tähtaeg: 7. mai 2001

1. Olgu a_0, a_1, ..., a_{2001} sellised reaalarvud, et:
   (i) $0 \leqslant a_k \leqslant 1$ iga $k = 0, 1, \ldots, 2001$ korral;
   (ii) $a_k \geqslant \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ iga $k = 1, 2, \ldots, 2000$ korral.

   Tõesta, et $a_{2001} - a_{2000} \leqslant \dfrac{1}{2001}$, ning too näide tingimustele (i) ja (ii) vastavatest arvudest a_0, a_1, ..., a_{2001}, mille korral $a_{2001} - a_{2000} = \dfrac{1}{2001}$.

2. Olgu X suvaline punkt kolmnurga ABC sisepiirkonnas. Tippudest A, B ja C läbi punkti X tõmmatud kiired lõikavad kolmnurga külgi BC, CA ja AB vastavalt punktides K, L ja M. Sirgega KL paralleelne sirge, mis läbib punkti M, lõikab sirget BC punktis V ja sirget AK punktis W. Tõesta, et $|VM| = |MW|$.

3. Leia vähim täisarv $k \geqslant 4$, mille korral mistahes k erineva täisarvu seast saab valida sellised erinevad arvud a, b, c ja d, et arv $a + b - c - d$ jagub 20-ga.

4. a) Tõesta, et võrrandisüsteemil

   $$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = x + y + z + 2 \end{cases}$$

   on täpselt üks selline lahend (x, y, z), kus arvud x, y, z on kõik positiivsed, ning leia see lahend.

   b) Näita, et kui positiivsuse tingimusest loobuda, siis leidub sellel võrrandisüsteemil lahend (x, y, z), kus arvud x, y, z on paarikaupa erinevad.

5. Kolmnurgas ABC on $\angle BAC > \angle BCA$. Olgu P selline punkt selle kolmnurga sisepiirkonnas, et $\angle PAC = \angle BCA$, ning Q selline punkt kolmnurgast väljaspool, et sirge PQ on paralleelne küljega AB ja sirge BQ on paralleelne küljega AC. Olgu R selline punkt küljel BC (punktist Q teisel pool sirget AP), et $\angle PRQ = \angle BCA$. Tõesta, et kolmnurkade ABC ja PQR ümberringjooned puutuvad teineteist.

6. Olgu n_1, n_2, n_3, ..., n_{2001} sellised paarikaupa erinevad naturaalarvud, et ühegi arvu n_i kümnendesitus ei ole ühegi teise arvu n_j kümnendesituse alguseks. Tõesta, et

   $$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_{2001}} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9}.$$

7. Olgu X n-elemendiline hulk ning A_1, A_2, ..., A_m selle kolme-elemendilised alamhulgad, kusjuures mistahes erinevate indeksite i ja j korral on alamhulkadel A_i ja A_j ülimalt üks ühine element. Tõesta, et hulgal X leidub selline vähemalt $[\sqrt{2n}]$-elemendiline alamhulk A, et ükski A_i ei sisaldu tervenisti alamhulgas A. (Siin $[x]$ tähistab reaalarvu x täisosa.)

8. Olgu $a > 1$ täisarv. Tõesta, et arvujadast

   $$a^2 + a - 1,\ a^3 + a^2 - 1,\ \ldots,\ a^{n+1} + a^n - 1,\ \ldots$$

   saab valida lõpmatu osajada, mille kõik arvud on paarikaupa ühistegurita.