Treeningvõistlus IMO-2014 võistkonnale

Tallinnas, 9. juunil 2014

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu $n > 1$ naturaalarv ja p algarv. Tõesta, et kui $p \mid n^3 - 1$ ja $n \mid p - 1$, siis $4p - 3$ on täisruut.

2. Olgu $ABCD$ rööpkülik. Nurga $\angle BAD$ poolitaja lõikab sirgeid BC ja CD vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et kolmnurga CKL ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga BCD ümberringjoonel.

3. Olgu $x, y, z > 0$ sellised reaalarvud, mille korral $xyz = 1$. Tõesta, et

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

Treeningvõistlus IMO-2014 võistkonnale

Tallinnas, 9. juunil 2014

Lahendused

1. Paneme tähele, et tegurdades saame, et $p|(n-1)\left(n^2+n+1\right)$. Seega, kuna p on algarv, siis kas $p|n-1$ või $p|n^2+n+1$. Kui $p|n-1$, siis $p \le n-1 < n \le p-1$, mis on vastuolu. Järelikult $p|n^2+n+1$. Tähistame $p = nk+1$, kus k on positiivne täisarv, kusjuures $k \le n+1$. Nüüd saame, et $p|\left(n^2+n+1\right)-p = n(n-k+1)$. Seega $p|n-k+1$. Kui $n-k+1 \ne 0$, siis $n-k+1 \ge p = nk+1$, mis annab, et $n(k-1)+k \le 0$. Seega $k = n-1$ ja järelikult $4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$.

2. Olgu M kolmnurga BCD ümberringjoone kaare BD, mis sisaldab punkti C, keskpunkt. Siis $|MB| = |MD|$ ja $\angle MBK = \angle MBC = \angle MDC$. Samuti

$$\angle BAK = \angle DAK = \angle BKA.$$

Seega on ABK võrdhaarne kolmnurk. Kokkuvõttes saame, et $|BK| = |DC|$. Nüüd, kuna $|MB| = |MD|, |BK| = |DC|$ ja $\angle MBK = \angle MDC$, siis kolmnurgad MBK ja MDC on võrdsed. Seega $|MK| = |MC|$. Sarnaselt saame, et $|ML| = |MC|$. Seega $|MC| = |MK| = |ML|$, millest järeldub väide.

3. Cauchy võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \\
&\qquad = \frac{x^4}{x(1+y)(1+z)} + \frac{y^4}{y(1+z)(1+x)} + \frac{z^4}{z(1+x)(1+y)} \\
&\qquad \ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x+y+z+2(xy+yz+zx)+3} \\
&\qquad \ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{4(x^2+y^2+z^2)} \ge \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

kus eelviimane võrratus kehtib, sest $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$, $x^2+y^2+z^2 \ge 3$ ja $x^2+y^2+z^2 \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{3} \ge x+y+z$.