Treeningvõistlus IMO-2014 võistkonnale

Väätsal, 21. juunil 2014

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk, kus $|AC| = |BC|$. Olgu P selline punkt kolmnurga ABC sees, mille korral $\angle PAB = \angle PBC$. Olgu M külje AB keskpunkt. Tõesta, et $\angle APC + \angle BPM = 180^\circ$.

2. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et suvaliste elementide $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$f\left(xf(x) + 2y\right) = f\left(x^2\right) + f(y) + x + y - 1.$$

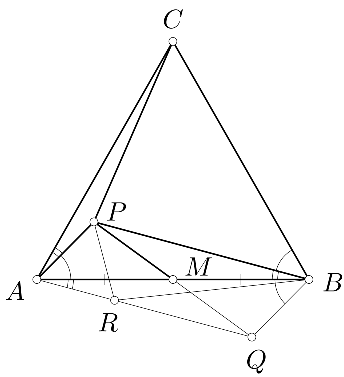
3. Tahvlile on kirjutatud arvud $1, 2, \ldots, 2014$. Igal sammul valitakse tahvlilt kaks arvu a ja b, mis kustutatakse ja mille asemel kirjutatakse üks arv $\dfrac{ab}{a+b+1}$. Pärast 2013 sammu jääb tahvlile ainult üks arv k. Leia k kõikvõimalikud väärtused.

Treeningvõistlus IMO-2014 võistkonnale

Väätsal, 21. juunil 2014

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Valime punkti Q nii, et $APBQ$ on rööpkülik (joonis 1). Valime sirgel AQ punkti R nii, et kolmnurgad ACB ja APR on sarnased. Vaatleme juhtu, kui R asub A ja Q vahel, muul juhul on tõestus analoogiline. Siis, kuna kehtib $\angle RAP = \angle BAC$, saame, et $\angle RAB = \angle PAC$. Samas $\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AP|}{|AC|}$, seega kolmnurgad ARB ja APC on sarnased. Nüüd, kuna $PRQB$ on kõõlnelinurk, siis

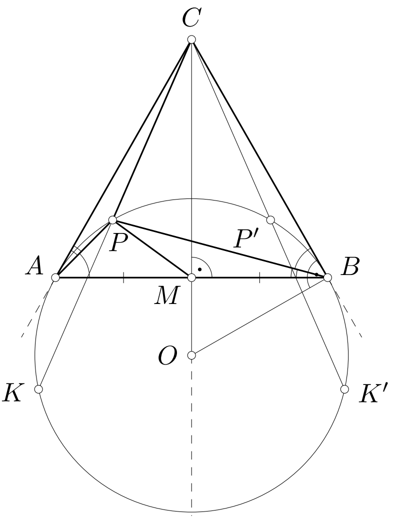


Joonis 1

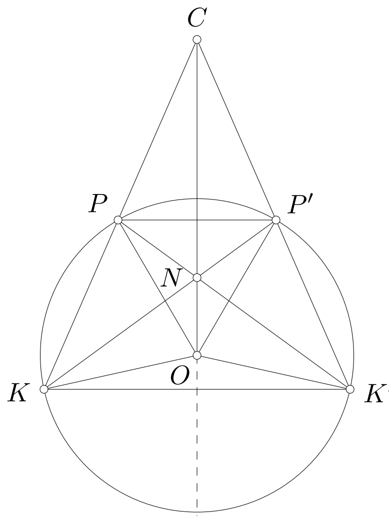
$$\angle BPM = \angle BPQ = \angle BRQ = 180^\circ - \angle ARB = 180^\circ - \angle APC.$$

Lahendus 2. Võrdus $\angle PAB = \angle PBC$ on piirdenurga omaduste põhjal samaväärne tingimusega, et sirge CB puutub kolmnurga PAB ümberringjoont. Kolmnurga ABC võrdhaarsusest tuleneva sümmeetria tõttu kehtib ka võrdus $\angle PBA = \angle PAC$ ning ka sirge CA puutub kolmnurga PAB ümberringjoont.

Olgu K kiire CP teine lõikepunkt kolmnurga PAB ümberringjoonega. Olgu P' ja K' vastavalt punktidega P ja K sümmeetrilised punktid sirge CM suhtes; ilmselt ka P' ja K' asuvad kolmnurga PAB ümberringjoonel (joonis 2).



Joonis 2



Joonis 3

Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et M on trapetsi $PP'K'K$ diagonaalide lõikepunkt, sest siis

$$\angle APC + \angle BPM = \angle APC + \angle BPK' = \angle BP'C + \angle BP'K = 180^\circ.$$

Olgu kolmnurga PAB ümberringjoone keskpunkt O ja trapetsi $PP'K'K$ diagonaalide lõikepunkt N. Võrduse $M = N$ näitamiseks tõestame potentside abil, et $|OM| = |ON|$. Esiteks, puutuja ja raadiuse ristseisu tõttu $\angle OBC = 90^\circ$, mistõttu

$$\angle OBM = 90^\circ - \angle CBM = \angle BCM.$$

Seega OB puutub kolmnurga BCM ümberringjoont, kust saame

$$|OM| \cdot |OC| = |OB|^2. \tag{1}$$

Teisalt, $\angle PK'C = \angle PK'P' = \dfrac{1}{2}\angle POP' = \angle POC$, millest tulenevalt on punktid C, P, O, K' ühel ringjoonel (joonis 3). Seega

$$\angle OPN = \angle OPK' = \angle OCK' = \angle NCP' = \angle NCP.$$

Järelikult on OP piirdenurga omaduste põhjal kolmnurga NPC ümberringjoone puutuja, kust saame

$$|ON| \cdot |OC| = |OP|^2. \tag{2}$$

Et aga nii B kui ka P asetsevad ringjoonel keskpunktiga O, siis $|OB| = |OP|$. Võrduste (1) ja (2) kokkuvõttes saamegi vajaliku võrduse $|OM| = |ON|$.

2. Valides $x, y = 0$ saame, et $f(0) = 1$. Nüüd valides $y = -xf(x)$ saame, et $f\left(x^2\right) = xf(x) - x + 1$. Asendades algses võrrandis $x = 0$ saame, et $f(2y) = f(y) + y$. Nüüd paneme tähele, et $f(4x) = f(2x) + 2x = f(x) + 3x$ ja seega

$$f\left(4x^2\right) = f\left(x^2\right) + 3x^2 = xf(x) + 3x^2 - x + 1.$$

Samas kuna $f\left(x^2\right) = xf(x) - x + 1$, siis

$$f\left(4x^2\right) = 2xf(2x) - 2x + 1 = 2xf(x) + 2x^2 - 2x + 1.$$

Niisiis $xf(x) + 3x^2 - x + 1 = 2xf(x) + 2x^2 - 2x + 1$ ja seega $x\left(f(x) - x - 1\right) = 0$, mis annab, et $f(x) = x + 1$, iga $x \neq 0$ jaoks. Järelikult $f(x) = x + 1$, iga x korral.

3. Näitame, et suurus $\prod_{x \in B}\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ jääb igal sammul muutumatuks, kus B on antud hetkel tahvlil olevate arvude hulk. Tõepoolest

$$\frac{1}{\frac{ab}{a+b+1}} + 1 = \frac{a+b+1}{ab} + 1 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right).$$

Seega

$$\frac{1}{k} + 1 = \left(\frac{1}{1} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right)\dots\left(\frac{1}{2014} + 1\right) = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\dots\frac{2015}{2014} = 2015$$

ja järelikult $k = \dfrac{1}{2014}$.