Тренировочное соревнование команды ММО'98

Кяэрику, 4–5 июля 1998

Первый день

1. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — возрастающая последовательность всех простых чисел и пусть x_0 — любое вещественное число с интервала $(0,1)$. Определим числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ соотношением

$$x_k = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x_{k-1} = 0, \\ \left\{ \dfrac{p_k}{x_{k-1}} \right\}, & \text{если } x_{k-1} \neq 0, \end{cases}$$

   где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. При каких значениях x_0 члены последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ начиная с некоторого места равны нулю?

2. Построим на сторонах треугольника ABC вне его равнобедренные треугольники BDC, CEA и AFB, основаниями которых являются соответственно стороны BC, CA и AB. Проведем из вершины A перпендикуляр к прямой EF, из вершины B — перпендикуляр к прямой FD, а из вершины C — перпендикуляр к прямой DE. Доказать, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

3. Доказать, что при любом заданном целом числе n существует единственный такой многочлен $Q(x)$, что $Q(-2) = Q(-5) = n$ и все коэффициенты многочлена $Q(x)$ принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Тренировочное соревнование команды ММО'98

Кяэрику, 4–5 июля 1998

Второй день

4. Назовем *обрезом* выпуклого n-угольника операцию, где отметят середины его каких-то двух смежных сторон AB ja BC (пусть это соответственно точки M и N) и заменят стороны AB и BC тремя сторонами AM, MN и NC (другими словами, преобразуют исходный n-угольник отрезанием треугольника MBN в выпуклый $(n+1)$-угольник). Обрезая правильный шестиугольник $\mathcal{P}_6$ площадью 1, получаем выпуклый семиугольник $\mathcal{P}_7$, обрезая в свою очередь его (одним из семи возможных способов) получаем выпуклый восьмиугольник $\mathcal{P}_8$, и т. д. Доказать, что как бы мы не проводили описанные обрезы, площадь каждого получаемого многоугольника $\mathcal{P}_n$ $(n \geqslant 6)$ будет более чем $\dfrac{1}{3}$.

5. Доказать, что при любых положительных вещественных числах a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}\,.$$

6. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{1998}$ — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условиям

$$a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$$

при всех таких индексах $i, j \geqslant 1$, где $i + j \leqslant 1998$. Доказать, что найдется такое вещественное число x, чтобы $a_n = [nx]$ (где $[y]$ обозначает целую часть числа y) при каждом $n = 1, 2, \ldots, 1998$.