Treeningvõistlus IMO'98 võistkonnale

Käärikul, 4.–5. juulil 1998

Esimene päev

1. Olgu $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ kõikide algarvude kasvav jada ning olgu x_0 suvaline reaalarv vahemikust $(0, 1)$. Defineerime arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ seosega

$$x_k = \begin{cases} 0\,, & \text{kui } x_{k-1} = 0, \\ \left\{\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right\}, & \text{kui } x_{k-1} \neq 0, \end{cases}$$

   kus $\{x\}$ tähistab arvu x murdosa. Milliste x_0 väärtuste korral on jada $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ liikmed mingist kohast alates võrdsed nulliga?

2. Konstrueerime kolmnurga ABC külgedele sellest väljapoole võrdhaarsed kolmnurgad BDC, CEA ja AFB, mille alusteks on vastavalt küljed BC, CA ja AB. Tõmbame tipust A ristsirge sirgele EF, tipust B ristsirge sirgele FD ja tipust C ristsirge sirgele DE. Tõesta, et need kolm ristsirget lõikuvad ühes punktis.

3. Tõesta, et mistahes etteantud täisarvu n korral leidub üks ja ainult üks niisugune polünoom $Q(x)$, et $Q(-2) = Q(-5) = n$ ning polünoomi $Q(x)$ kõik kordajad kuuluvad hulka $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Treeningvõistlus IMO'98 võistkonnale

Käärikul, 4.–5. juulil 1998

Teine päev

4. Nimetame kumera n-nurga *lõikamiseks* operatsiooni, kus märgitakse selle mingi kahe järjestikuse serva AB ja BC keskpunktid (olgu need vastavalt M ja N) ning asendatakse servad AB ja BC kolme servaga AM, MN ja NC (ehk teisisõnu, muudetakse esialgne n-nurk kolmnurga MBN äralõikamisega kumeraks $(n+1)$-nurgaks). Lõigates korrapärast kuusnurka $\mathcal{P}_6$ pindalaga 1, moodustame kumera seitsenurga $\mathcal{P}_7$, seda omakorda lõigates (ühel seitsmest võimalikust viisist) saame kumera kaheksanurga $\mathcal{P}_8$, jne. Tõesta, et kirjeldatud lõikamisi mistahes viisil sooritades on iga saadava hulknurga $\mathcal{P}_n$ $(n \geqslant 6)$ pindala suurem kui $\dfrac{1}{3}$.

5. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c korral kehtib võrratus
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}\,.$$

6. Rahuldagu mittenegatiivsed täisarvud a_1, a_2, $\ldots$, a_{1998} tingimusi
$$a_i+a_j\leqslant a_{i+j}\leqslant a_i+a_j+1$$
kõikide niisuguste indeksite i, $j \geqslant 1$ korral, kus $i+j \leqslant 1998$. Tõesta, et leidub niisugune reaalarv x, et $a_n=[nx]$ (kus $[y]$ tähistab arvu y täisosa) iga $n = 1, 2, \ldots, 1998$ korral.