Treeningvõistlus IMO-2011 võistkonnale

Nelijärvel, 19. juunil 2011

Vastused ja lahendused

1. Tähistame $A = A_n$ ning olgu $M_1, M_2, \ldots, M_{n-2}$ vastavalt n-nurga külgede $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}$ keskpunktid. Näitame, et mustkunstnikul piisab nimetada punktipaarid (A, M_1), (A, M_2), $\ldots$, (A, M_{n-2}).

   Olgu $2T_i$ kolmnurga AA_iA_{i+1} pindala (mille mediaan on AM_i) ning S_i pindala, mis teatatakse mustkunstnikule punktipaari (A, M_i) nimetamisel. Siis

   $$S_i = \min\left(2T_1 + \ldots + 2T_{i-1} + T_i,\ T_i + 2T_{i+1} + \ldots + 2T_{n-2}\right),$$

   kusjuures $S_1 = T_1$ ja $S_{n-2} = T_{n-2}$. Paneme tähele, et mustkunstnikul piisab teada saada pindalad T_i, sest kogu n-nurga pindala on $S = 2(T_1 + \ldots + T_{n-2})$.

   Tõmbame läbi tipu A sirge AL, mis jaotab n-nurga kaheks võrdpindseks osaks. Olgu punktid $M_1, \ldots, M_k$ ühel pool ja punktid $M_{k+1}, \ldots, M_{n-2}$ teisel pool sirget AL (erijuhul võib punkt M_k või M_{k+1} asuda ka sirgel AL), siis iga $i = 1, \ldots, k$ korral on $S_i = 2T_1 + \ldots + 2T_{i-1} + T_i$ ning iga $i = k+1, \ldots, n-2$ korral on $S_i = T_i + 2T_{i+1} + \ldots + 2T_{n-2}$. Seetõttu $S_1 < S_2 < \ldots < S_k$ ja $S_{k+1} > S_{k+2} > \ldots > S_{n-2}$.

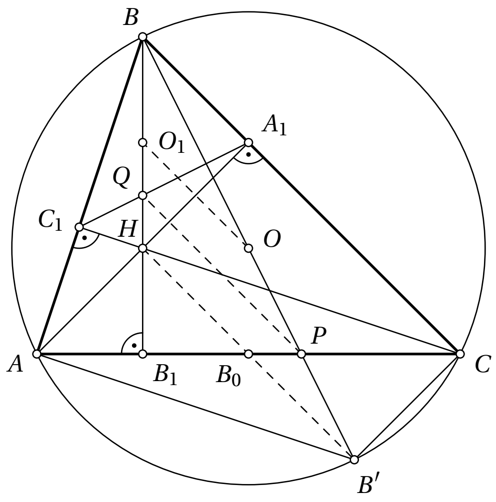
   Niisiis, kui mustkunstnik nimetab järjest punktipaarid (A, M_1), (A, M_2), $\ldots$, (A, M_{n-2}) ja saab vastuseks pindalad $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$, kus

   $$S_1 < S_2 < \ldots < S_m \geqslant S_{m+1} > S_{m+2} > \ldots > S_{n-2},$$

   siis võib olla $k = m-1$ või $k = m$. Seega iga $i = 1, \ldots, m-1$ korral kehtivad seosed $S_i = 2T_1 + \ldots + 2T_{i-1} + T_i$, st $S_1 = T_1$, $S_2 = 2T_1 + T_2$, $\ldots$, $S_{m-1} = 2(T_1 + \ldots + T_{m-2}) + T_{m-1}$. Nendest seostest saab mustkunstnik järjest leida pindalad $T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$. Samuti kehtivad iga $i = m+1, \ldots, n-2$ korral seosed $S_i = T_i + 2T_{i+1} + \ldots + 2T_{n-2}$, kust mustkunstnik saab järjest leida pindalad $T_{n-2}, T_{n-1}, \ldots, T_{m+1}$. Lõpuks leiab mustkunstnik pindala T_m seosest $S_m = \min(2T_1 + \ldots + 2T_{m-1}, 2T_{m+1} + \ldots + 2T_{n-2}) + T_m$.

2. *Lahendus 1.* Olgu O_1 lõigu BH keskpunkt ja B' selline punkt kolmnurga ABC ümberringjoonel, et BB' on selle ringjoone diameeter (vt joonist 1). Siis OO_1 on kolmnurga $B'BH$ kesklõik, mistõttu $OO_1 \parallel B'H$.

   Näitame nüüd, et punkt B_0 asub lõigul $B'H$, st $OO_1 \parallel B_0H$. Et lõik BB' on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter, siis $\angle BAB' = \angle BCB' = 90^\circ$, st



Joonis 1

$B'A \parallel CC_1$ ja $B'C \parallel AA_1$. Seega on nelinurk $AHCB'$ rööpkülik ning selle diagonaali AC keskpunkt B_0 on diagonaalide lõikepunkt, st asub ka teisel diagonaalil $B'H$.

Jääb üle näidata, et $OO_1 \parallel PQ$. Kuna $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90^\circ$, siis BA_1HC_1 on kõõlnelinurk ja BH selle ümberringjoone diameeter, st O_1 on kolmnurga A_1BC_1 ümberringjoone keskpunkt. Täisnurksete kolmnurkade AA_1B ja CC_1B sarnasusest saame, et $\dfrac{|A_1B|}{|C_1B|} = \dfrac{|AB|}{|CB|}$, st ka kolmnurgad ABC ja A_1BC_1 on sarnased. Et O ja O_1 ning P ja Q on neis sarnastes kolmnurkades teineteisele vastavad punktid, siis $\dfrac{|BO|}{|BO_1|} = \dfrac{|BP|}{|BQ|}$, st $OO_1 \parallel PQ$, mida oligi tarvis näidata.

Lahendus 2. Olgu B' selline punkt kolmnurga ABC ümberringjoonel, et BB' on selle ringjoone diameeter. Samuti nagu lahenduses 1 näitame esmalt, et punkt B_0 asub lõigul $B'H$.

Olgu nüüd B_1 tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt. Kõõlnelinurgast $ABCB'$ saame, et $\angle BB'C = \angle BAC = \angle BAB_1$ ning seega $\angle ABB_1 = \angle B'BC$, st täisnurksed kolmnurgad BC_1H ja BCB' on sarnased.

Et $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90^\circ$, siis BA_1HC_1 on kõõlnelinurk, mistõttu

$$\angle BC_1Q = \angle BC_1A_1 = \angle BHA_1 = 90^\circ - \angle HBA_1 = 90^\circ - \angle B_1BC = \angle BCP.$$

Näeme, et kolmnurgad BC_1Q ja BCP on sarnased, sest

$$\angle CBQ = \angle ABB_1 = \angle B'BC = \angle PBC$$

ja $\angle BC_1Q = \angle BCP$. Kasutades seda ning kolmnurkade BC_1H ja BCB' sarnasust saame, et

$$\frac{|BQ|}{|BP|} = \frac{|BC_1|}{|BC|} = \frac{|BH|}{|BB'|},$$

mis tähendab, et $PQ \parallel B'H$ (ja seega ka $PQ \parallel B_0H$).

Lahendus 3. Ülesande väite tõestamiseks piisab näidata, et

$$\frac{|B_1Q|}{|HQ|} = \frac{|B_1P|}{|B_0P|}.$$

Kuna OB_0 on külje AC keskristsirge, siis $BB_1 \parallel OB_0$ ja seega $\frac{|B_1P|}{|B_0P|} = \frac{|BP|}{|OP|}$. Olgu O_1 lõigu BH keskpunkt. Samuti nagu lahenduses 1 näitame, et $OO_1 \parallel PQ$, kust $\frac{|BP|}{|OP|} = \frac{|BQ|}{|O_1Q|}$. Niisiis jääb üle näidata, et $\frac{|B_1Q|}{|HQ|} = \frac{|BQ|}{|O_1Q|}$ ehk

$$|B_1Q| \cdot |O_1Q| = |BQ| \cdot |HQ|.$$

Et $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90^\circ$, siis BA_1HC_1 on kõõlnelinurk, mistõttu

$$|BQ| \cdot |HQ| = |C_1Q| \cdot |A_1Q|.$$

Tõestuse lõpuleviimiseks piisab niisiis näidata, et

$$|B_1Q| \cdot |O_1Q| = |C_1Q| \cdot |A_1Q|,$$

st $O_1A_1B_1C_1$ on kõõlnelinurk.

Et O_1 on kõõlnelinurga BA_1HC_1 ümberringjoone keskpunkt, siis kolmnurk $C_1O_1A_1$ on võrdhaarne ning

$$\angle O_1A_1C_1 = \frac{180^\circ - \angle C_1O_1A_1}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C_1O_1A_1}{2} = 90^\circ - \angle C_1BC.$$

Et $\angle BB_1C = \angle BC_1C = 90^\circ$, siis BCB_1C_1 on kõõlnelinurk ning

$$\angle O_1B_1C_1 = \angle BB_1C_1 = \angle BCC_1 = 90^\circ - \angle C_1BC.$$

Seega $\angle O_1A_1C_1 = \angle O_1B_1C_1$, mis tähendabki, et ka $O_1A_1B_1C_1$ on kõõlnelinurk.

3. a) Näitame induktsiooniga, et igal sammul kehtib mistahes kahe kõrvutise murru $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ korral võrdus $bc - ad = 1$ — sellest järeldub ilmselt, et $\text{SÜT}(a,b) = 1$ ja $\text{SÜT}(c,d) = 1$, st need murrud on taandumatud. See võrdus kehtib alguses: $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. Kehtigu nüüd murdude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ korral võrdus $bc - ad = 1$, ning näitame, et vajalikud võrdused kehtivad siis ka murdude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a+c}{b+d}$ ning $\frac{a+c}{b+d}$ ja $\frac{c}{d}$ korral. Tõepoolest,

$$b(a+c) - a(b+d) = (ba - ab) + (bc - ad) = 0 + 1 = 1$$

ja

$$(b+d)c - (a+c)d = (dc - cd) + (bc - ad) = 0 + 1 = 1.$$

b) Näitame esmalt, et kui mingil sammul kirjutatakse tahvlile murd $x = \frac{a}{b}$, siis samal sammul kirjutatakse tahvlile ka murd $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$ ning järgmisel sammul murd $x + 1 = \frac{a+b}{b}$.

Esimese väite tõestamiseks paneme tähele, et esimesel sammul kirjutatakse tahvli keskele murd $\frac{1}{1}$, ja edasi näeme induktsiooniga, et igal järgneval sammul tahvli vasakule ja paremale poole lisatavad murrud jaotuvad paarideks, kus iga paari murrud paiknevad keskmise murru $\frac{1}{1}$ suhtes sümmeetriliselt ja on teineteise pöördarvud.

Teise väite tõestamiseks näitame, et kui meil on kaks kõrvutiste murdude paari $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ning $\frac{a+b}{b}$ ja $\frac{c+d}{d}$, siis kõik teise murdude paari vahele edaspidi lisatavad murrud on esimese paari vahele lisatavatest vastavatest murdudest täpselt 1 võrra suuremad. Tõepoolest, esimesel sammul lisatavad murrud on vastavalt $\frac{a+c}{b+d}$ ja $\frac{a+b+c+d}{b+d} = \frac{a+c}{b+d} + 1$ ning induktsiooniga veendume kergesti, et sama seos kehtib ka järgmistel sammudel lisatavate murdude vahel. Paneme tähele, et äsja tõestatu kehtib ka siis, kui üks arvudest b ja d on 0 (aga mitte mõlemad).

Kuna algul on tahvlil kõrvutiste murdude paar $\frac{0}{1}$ ja $\frac{1}{0}$ ning esimese sammu järel paar $\frac{1}{1} = \frac{0+1}{1}$ ja $\frac{1}{0} = \frac{1+0}{0}$, siis vastavalt eelmises lõigus tõestatule näeme, et igale kogu tahvlile (st murdude $\frac{0}{1}$ ja $\frac{1}{0}$ vahele) lisatavale murrule vastab sammu võrra hiljem tahvli paremale poole (st murdude $\frac{1}{1}$ ja $\frac{1}{0}$ vahele) lisatav murd, mis on temast täpselt 1 võrra suurem.

Jääb üle näidata, et mistahes positiivne ratsionaalarv $\frac{a}{b}$ on saadav arvust 0 (mis on tahvlil algusest peale olemas) lõpliku arvu sammudega, kus iga sammul liidetakse olemasolevale arvule 1 või asendatakse see oma pöördarvuga. Selleks rakendame arvupaarile (a, b) *Eukleidese algoritmi*: olgu $(a_0, b_0) = (a, b)$ ning edasi

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k - b_k,\ b_k), & \text{kui } a_k \geqslant b_k; \\ (b_k,\ a_k), & \text{kui } a_k < b_k, \end{cases}$$

kuni mingil sammul $a_n = 0$. See algoritm lõpeb lõpliku arvu sammude järel, sest esimest tüüpi sammul väheneb summa $a_k + b_k$, jäädes alati mittenegatiivseks, ning igale teist tüüpi sammule järgneb vähemalt üks esimest tüüpi samm. Vaadeldes arvupaare (a_k, b_k) murdudena $\frac{a_k}{b_k}$ näeme, et selle algoritmi igal sammul lahutatakse murrust 1 või asendatakse see oma pöördarvuga, kuni lõpuks jõuame arvuni 0. Rakendades seda algoritmi tagurpidi, olemegi niisiis tõestanud vajaliku väite.

Märkus. Eukleidese algoritmi saab kasutada positiivsete täisarvude a ja b suurima ühisteguri leidmiseks: algoritmi viimasel sammul, kui $a_n = 0$, on $b_n = \text{SÜT}(a, b)$.