

Тренировочное соревнование команды ММО-2011

Нелиярве, 19 июня 2011

Время, отводимое для решения: 4 часа 30 минут.

Пояснения к текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Чародей желает отгадать площадь выпуклого n -угольника $A_1A_2\dots A_n$. Для этого он называет по очереди пары точек (точками могут быть вершины многоугольника и середины сторон) и для каждой названной пары ему сообщают меньшую из площадей двух многоугольников, на которые отрезок, соединяющий названные две точки, разбивает исходный n -угольник. Доказать, что чародею достаточно назвать $n - 2$ пары точек, чтобы узнать площадь n -угольника.
2. Пусть ABC – разносторонний остроугольный треугольник, а A_1 и C_1 – соответственно основания высот, проведенных из вершин A и C . Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC , O – центр его описанной окружности, а B_0 – середина стороны AC . Прямые BO и AC пересекаются в точке P , а прямые BH и A_1C_1 – в точке Q . Доказать, что прямые B_0H и PQ параллельны.
3. Вначале на краях доски написаны дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$. На каждом шаге между каждыми двумя уже имеющимися на доске соседними дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ записывают ещё дробь $\frac{a+c}{b+d}$. Доказать, что:
 - а) Все записываемые на доске дроби несократимые.
 - б) Каждое положительное рациональное число (несократимая дробь) записывается на каком-то шаге на доску.

Тренировочное соревнование команды ММО-2011

Нелиярве, 19 июня 2011

Время, отводимое для решения: 4 часа 30 минут.

Пояснения к текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Чародей желает отгадать площадь выпуклого n -угольника $A_1A_2\dots A_n$. Для этого он называет по очереди пары точек (точками могут быть вершины многоугольника и середины сторон) и для каждой названной пары ему сообщают меньшую из площадей двух многоугольников, на которые отрезок, соединяющий названные две точки, разбивает исходный n -угольник. Доказать, что чародею достаточно назвать $n - 2$ пары точек, чтобы узнать площадь n -угольника.
2. Пусть ABC – разносторонний остроугольный треугольник, а A_1 и C_1 – соответственно основания высот, проведенных из вершин A и C . Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC , O – центр его описанной окружности, а B_0 – середина стороны AC . Прямые BO и AC пересекаются в точке P , а прямые BH и A_1C_1 – в точке Q . Доказать, что прямые B_0H и PQ параллельны.
3. Вначале на краях доски написаны дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$. На каждом шаге между каждыми двумя уже имеющимися на доске соседними дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ записывают ещё дробь $\frac{a+c}{b+d}$. Доказать, что:
 - а) Все записываемые на доске дроби несократимые.
 - б) Каждое положительное рациональное число (несократимая дробь) записывается на каком-то шаге на доску.