

Treeningvõistlus IMO-2011 võistkonnale

Nelijärvel, 19. juunil 2011

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Mustkunstnikul tuleb ära arvata kumera n -nurga $A_1 A_2 \dots A_n$ pindala. Selleks nimetab ta järjest punktipaare (kus punktideks võivad olla hulknurga tipud ja külgede keskpunktid) ning iga nimetatud punktipaari kohta öeldakse talle miinimum nende kahe hulknurga pindaladest, milleks nimetatud punkte ühendav lõik algse n -nurga jaotab. Tõesta, et mustkunstnikul piisab n -nurga pindala teadasaamiseks nimetada $n - 2$ punktipaari.
2. Olgu ABC isekülgne teravnurkne kolmnurk ning A_1 ja C_1 vastavalt selle tipudest A ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, O tema ümberringjoone keskpunkt ning B_0 külje AC keskpunkt. Lõikugu sirged BO ja AC punktis P ning sirged BH ja $A_1 C_1$ punktis Q . Tõesta, et sirged $B_0 H$ ja PQ on paralleelsed.
3. Tahvli servadesse on algul kirjutatud murrud $\frac{0}{1}$ ja $\frac{1}{0}$. Igal järgneval sammul kirjutatakse iga kahe juba tahvlil oleva kõrvutise murrude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ vahele lisaks murd $\frac{a+c}{b+d}$. Tõesta, et:
 - a) Kõik tahvlile lisaks kirjutatavad murrud on taandumatud.
 - b) Iga positiivne ratsionaalarv (taandumatu murd) kirjutatakse mingil sammul tahvlile.

Treeningvõistlus IMO-2011 võistkonnale

Nelijärvel, 19. juunil 2011

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Mustkunstnikul tuleb ära arvata kumera n -nurga $A_1 A_2 \dots A_n$ pindala. Selleks nimetab ta järjest punktipaare (kus punktideks võivad olla hulknurga tipud ja külgede keskpunktid) ning iga nimetatud punktipaari kohta öeldakse talle miinimum nende kahe hulknurga pindaladest, milleks nimetatud punkte ühendav lõik algse n -nurga jaotab. Tõesta, et mustkunstnikul piisab n -nurga pindala teadasaamiseks nimetada $n - 2$ punktipaari.
2. Olgu ABC isekülgne teravnurkne kolmnurk ning A_1 ja C_1 vastavalt selle tipudest A ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, O tema ümberringjoone keskpunkt ning B_0 külje AC keskpunkt. Lõikugu sirged BO ja AC punktis P ning sirged BH ja $A_1 C_1$ punktis Q . Tõesta, et sirged $B_0 H$ ja PQ on paralleelsed.
3. Tahvli servadesse on algul kirjutatud murrud $\frac{0}{1}$ ja $\frac{1}{0}$. Igal järgneval sammul kirjutatakse iga kahe juba tahvlil oleva kõrvutise murrude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ vahele lisaks murd $\frac{a+c}{b+d}$. Tõesta, et:
 - a) Kõik tahvlile lisaks kirjutatavad murrud on taandumatud.
 - b) Iga positiivne ratsionaalarv (taandumatu murd) kirjutatakse mingil sammul tahvlile.