Treeningvõistlus IMO-2010 võistkonnale

Tartus, 14. juunil 2010

Vastused ja lahendused

1. *Vastus:* 1 ja 3.

Kui $n = 1$, siis $x^1 + y^1 + z^1 = x + y + z = 0$ kõigi vaadeldavate kolmikute (x, y, z) korral. Kui $n = 3$, siis

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz = 3$$

kõigi vaadeldavate kolmikute (x, y, z) korral.

Näitame nüüd, et rohkem sellise omadusega arve n ei ole. Selleks vaatleme kaht ülesande tingimusi rahuldavat arvukolmikut

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1\right),\\ (x_2, y_2, z_2) &= \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{4}\right).\end{aligned}$$

Veendume esmalt, et avaldise $x_1^n + y_1^n + z_1^n$ väärtus on täisarv iga positiivse täisarvu n korral. Selleks piisab näidata, et arv $A_n = (1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n$ jagub alati arvuga 2^n. Vahetu kontroll näitab, et see väide kehtib $n = 1$ ja $n = 2$ korral. Edasi kasutame induktsiooni n järgi:

$$\begin{aligned}A_n &= (1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n =\\ &= \left((1+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5})\right) \cdot \left((1+\sqrt{5})^{n-1} + (1-\sqrt{5})^{n-1}\right) -\\ &\quad - ((1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{n-1} - ((1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{n-1} =\\ &= A_1 \cdot A_{n-1} - (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) \cdot \left((1+\sqrt{5})^{n-2} + (1-\sqrt{5})^{n-2}\right) =\\ &= A_1 \cdot A_{n-1} - 4 \cdot A_{n-2}\,.\end{aligned}$$

Vastavalt induktsiooni eeldusele jagub esimene liidetav arvuga $2 \cdot 2^{n-1}$ ja teine liidetav arvuga $4 \cdot 2^{n-2}$, st arv A_n jagub tõepoolest arvuga 2^n.

Samas avaldise $x_2^n + y_2^n + z_2^n$ väärtus

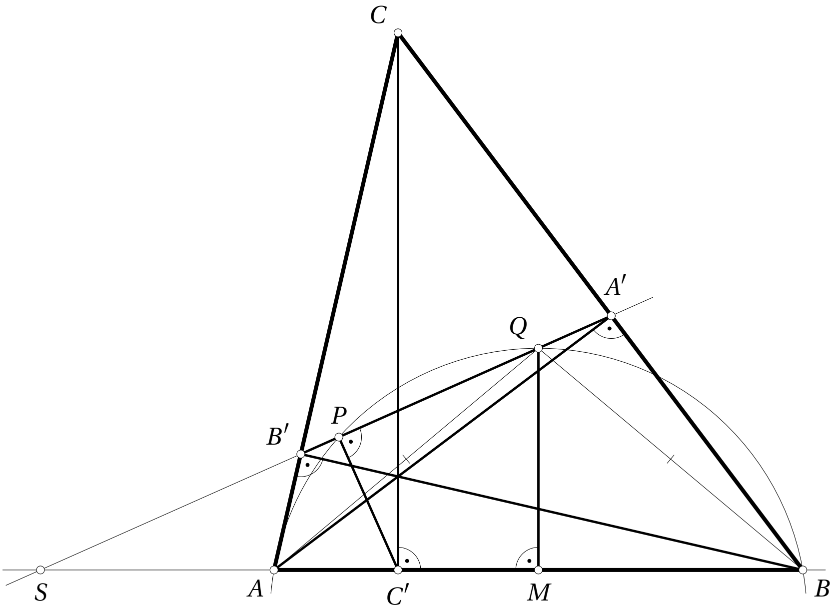
$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^n}$$

väärtus on täisarv ainult $n = 1$ ja $n = 3$ korral. Tõepoolest: kui $n \neq 1$ ja $n \neq 3^k$, siis selle murru lugeja on positiivne täisarv ja nimetaja irratsionaalarv; kui aga $n = 3^k$, kus $k > 1$, siis nimetaja on 2^k ja lugeja on $2^{3k} \pm 2$, mis ei jagu arvuga 2^k.

Kokkuvõttes näitasime, et kui n ei ole 1 ega 3, siis avaldiste $x_1^n + y_1^n + z_1^n$ ja $x_2^n + y_2^n + z_2^n$ väärtused on erinevad, st ülesande tingimus ei ole täidetud.

2. Kui $|AC| = |BC|$, siis punktid P ja Q langevad kokku ning punkt P paikneb kõrgusel CC', mistõttu $\angle PBQ = \angle PAQ = \angle PC'C = 0$. Edaspidises eeldame, et $|AC| \neq |BC|$.

Olgu M külje AB keskpunkt, siis lõigud QM ja AB on risti, sest QM on võrdhaarse kolmnurga AQB tipust Q alusele AB tõmmatud kõrgus. Et vastavalt konstruktsioonile on ka $C'P$ ja PQ risti ning eelduse $|AC| \neq |BC|$ tõttu $M \neq C'$ ja $P \neq Q$, siis $\angle C'PQ = \angle C'MQ = 90°$, st $C'MQP$ on kõõlnelinurk.



Joonis 1

Paneme tähele, et ka $ABA'B'$ on kõõlnelinurk, sest $\angle AA'B = \angle AB'B = 90°$, ning $C'MA'B'$ on kõõlnelinurk, sest punktid C', M, A', B' paiknevad kõik kolmnurga ABC üheksa-punkti ringjoonel.

Olgu nüüd S sirgete AB ja $A'B'$ lõikepunkt. Vaadeldes punktist S nelinurkade $C'MQP$, $C'MA'B'$ ja $ABA'B'$ ümberringjoontele tõmmatud puutujaid (kolmnurga ABC teravnurksuse tõttu paikneb punkt S väljaspool lõike AB, $A'B'$ ja PQ ning seega ka kõigist neist ringjoontest väljaspool) näeme, et

$$|SP| \cdot |SQ| = |SC'| \cdot |SM| = |SB'| \cdot |SA'| = |SA| \cdot |SB| \,.$$

Saadud võrdus $|SP| \cdot |SQ| = |SA| \cdot |SB|$ näitab, et ka $ABQP$ on kõõlnelinurk, mistõttu $\angle PAQ = \angle PBQ$.

Vaadeldes nüüd nelinurga $ABQP$ ümberringjoone kõõle AB ja PQ näeme, et

$$\angle PC'C = \angle PSA = \frac{|\overset{\frown}{BQ} - \overset{\frown}{AP}|}{2} = \frac{|\overset{\frown}{AQ} - \overset{\frown}{AP}|}{2} = \frac{\overset{\frown}{PQ}}{2} = \angle PAQ$$

(kuna $|AQ| = |BQ|$, siis ka $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ}$).

3. Näitame esmalt, et iga maletaja mängis viiki ülimalt ühe vastasega. Oletame vastuväiteliselt, et maletaja X mängis viiki maletajatega Y ja Z. Siis vastavalt tingimusele (ii) pidi Z pidi võitma kas maletajat X (mis ei ole võimalik, sest nad mängisid omavahel viiki) või maletajat Y — seega Z võitis maletajat Y. Analoogiliselt saame aga ka näidata, et Y võitis maletajat Z — vastuolu.

Nimetame maletajate järjendit $A_1,, A_2, \ldots, A_s$ *kahanevaks*, kui iga $i = 2, \ldots, s$ korral maletaja A_i kaotas maletajale A_{i-1}. Olgu nüüd $A_1,, A_2, \ldots, A_k$ maksimaalse pikkusega kahanev järjend — meil on vaja näidata, et $k = n$.

Oletame, et $k < n$, siis leidub maletaja B, kes järjendisse $A_1,, A_2, \ldots, A_k$ ei kuulu. Et vaadeldav kahanev järjend on pikim võimalik, siis B ei kaotanud maletajale A_k. Oletame, et B võitis maletajat A_k — siis B ja A_{k-1} ei saanud mängida viiki, kuna A_k ei võitnud kumbagi neist. Kui B oleks kaotanud maletajale A_{k-1}, siis oleks $A_1,, A_2, \ldots, A_{k-1}, B, A_k$ kahanev järjend pikkusega $k+1$. Niisiis pidi B võitma maletajat A_{k-1}, ning korrates seda arutlust järjekorras $A_{k-2}, \ldots, A_1$ jaoks näeme, et B pidi võitma neid kõiki, sh ka maletajat A_1. Nüüd on aga $B, A_1,, A_2, \ldots, A_k$ kahanev järjend pikkusega $k+1$. Saadud vastuolu näitab, et B ei saanud maletajat A_k võita — seega B ja A_k mängisid omavahel viiki. Et aga B oli suvaline järjendisse $A_1,, A_2, \ldots, A_k$ mittekuuluv maletaja ja vastavalt eespool tõestatule sai A_1 mängida viiki ülimalt ühe vastasega, siis peab B olema ainus selline maletaja, ning $k = n - 1$.

Kui nüüd oletada, et B võitis maletajat A_{k-1}, siis korrates eespool toodud arutlust leiame, et B võitis ka maletajaid $A_{k-2}, \ldots, A_1$ ning $B, A_1,, A_2, \ldots, A_k$ on kahanev järjend pikkusega $k+1$. Et B sai mängida viiki ülimalt ühe vastasega ning ta mängis viiki maletajaga A_k, siis järelikult B pidi kaotama maletajale A_{k-1}. Analoogiliselt veendume nüüd, et B pidi kaotama ka maletajatele

$A_{k-2}, \ldots, A_1$ — st B ei võitnud ühtki maletajatest $A_1,, A_2, \ldots, A_k$. See on aga vastuolus ülesande tingimustega, sest tingimuse (i) kohaselt pidid lisaks maletajatele B ja A_k veel mingid maletajad A_i ja A_j omavahel viiki mängima, ning tingimuse (ii) kohaselt pidi B vähemalt üht neist võitma.

Saadud vastuolu näitab, et sellist pikimasse kahanevasse järjendisse mittekuuluvat maletajat B ei leidu, ehk $k = n$.