Тренировочное соревнование команды ММО-2010

Тарту, 14 июня 2010

Время, отводимое для решения: 4 часа 30 минут.
Пояснения к текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие положительные целые числа n, при которых значение выражения $x^n + y^n + z^n$ одинаково для всех троек действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющих равенствам $x + y + z = 0$ и $xyz = 1$.

2. Пусть A', B' и C' – основания высот, опущенных из вершин A, B и C остроугольного треугольника ABC. Пусть P – основание перепендикуляра, опущенного из точки C' на прямую $A'B'$, а Q – такая точка на прямой $A'B'$, что $|AQ| = |BQ|$. Доказать, что

$$\angle PAQ = \angle PBQ = \angle PC'C\,.$$

3. В шахматном турнире участвовало n шахматистов $(n \geqslant 4)$. Каждый шахматист сыграл с каждым соперником одну партию, которая закончилось победой одного из них или ничьёй. Известно что

(i) в турнире по крайней мере две партии были сыграны вничью;

(ii) если какие-то два шахматиста сыграли вничью, то каждый из оставшихся $n - 2$ шахматистов выиграл по крайней мере у одного из них.

Доказать, что всех n шахматистов можно расположить в таком порядке, что каждый кроме первого проиграл непосредственно предшествующему ему шахматисту.

Тренировочное соревнование команды ММО-2010

Тарту, 14 июня 2010

Время, отводимое для решения: 4 часа 30 минут.
Пояснения к текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие положительные целые числа n, при которых значение выражения $x^n + y^n + z^n$ одинаково для всех троек действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющих равенствам $x + y + z = 0$ и $xyz = 1$.

2. Пусть A', B' и C' – основания высот, опущенных из вершин A, B и C остроугольного треугольника ABC. Пусть P – основание перепендикуляра, опущенного из точки C' на прямую $A'B'$, а Q – такая точка на прямой $A'B'$, что $|AQ| = |BQ|$. Доказать, что
$$\angle PAQ = \angle PBQ = \angle PC'C\,.$$

3. В шахматном турнире участвовало n шахматистов ($n \geqslant 4$). Каждый шахматист сыграл с каждым соперником одну партию, которая закончилось победой одного из них или ничьёй. Известно что
   (i) в турнире по крайней мере две партии были сыграны вничью;
   (ii) если какие-то два шахматиста сыграли вничью, то каждый из оставшихся $n - 2$ шахматистов выиграл по крайней мере у одного из них.

   Доказать, что всех n шахматистов можно расположить в таком порядке, что каждый кроме первого проиграл непосредственно предшествующему ему шахматисту.