

Treeningvõistlus IMO-2010 võistkonnale

Tartus, 14. juunil 2010

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n , mille korral avaldise $x^n + y^n + z^n$ väärtus on üks ja sama kõigi selliste reaalarvukolmikute (x, y, z) jaoks, kus $x + y + z = 0$ ja $xyz = 1$.
2. Olgu teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A , B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt A' , B' ja C' . Olgu punktist C' sirgele $A'B'$ tõmmatud ristlõigu aluspunkt P ning olgu Q selline punkt sirgel $A'B'$, et $|AQ| = |BQ|$. Tõesta, et

$$\angle PAQ = \angle PBQ = \angle PC'C.$$

3. Maleturniiril osales n maletajat ($n \geq 4$). Iga maletaja mängis iga vastasega ühe partii, mis lõppes neist ühe võiduga või viigiga. On teada, et:
 - (i) vähemalt kaks turniiril mängitud partiid lõppesid viigiga;
 - (ii) kui mingid kaks maletajat mängisid omavahel viiki, siis igaüks ülejäänud $n - 2$ maletajast võitis vähemalt üht neist.

Tõesta, et kõik n maletajat saab järjestada nii, et neist igaüks peale esimese kaotas talle järjekorras vahetult eelnevale maletajale.