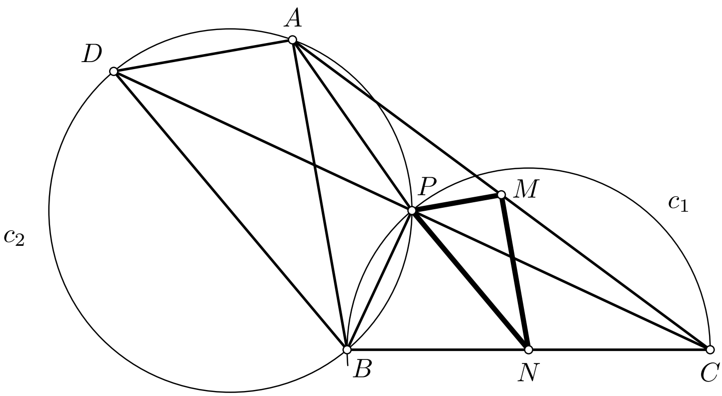
Treeningvõistlus IMO-2009 võistkonnale

Tartus, 25. juunil 2009

Vastused ja lahendused

1. *Vastus:* n on algarv või 1.
   Olgu $P(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$. Tingimusest $P(n) = 1$ saame, et $a_0 \equiv 1 \pmod{d}$ arvu n suvalise jagaja d korral (sest $P(n)$ avaldise kõik ülejäänud liikmed jaguvad n-ga ja seega ka d-ga).
   Olgu nüüd $n > 1$ ja p arvu n vähim algtegur. Kui $n \neq p$, siis $P = p \cdot n'$, kus $n' \geqslant p$, ning tingimusest $P(n') = p$ saame, et $a_0 \equiv p \pmod{n'}$, mis on vastuolus eespool tõestatuga, et $a_0 \equiv 1 \pmod{n'}$.
   Kui n on algarv või 1, siis sobib $P(x) = n + 1 - x$.

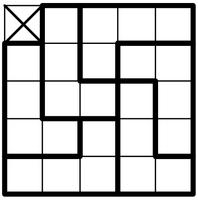


Joonis 1

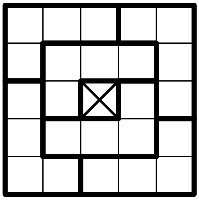
2. Olgu c_1 ringjoon diameetriga BC, siis tingimusest $\angle BPC = 90^\circ$ saame, et punkt P paikneb ringjoonel c_1 (vt joonist 1). Olgu c_2 ringjoone c_1 peegeldus sirge BP suhtes, siis tingimusest $\angle BAP = \angle BCP$ ning sellest, et punktid A ja C on erineval pool sirget BP, saame, et punkt A paikneb ringjoonel c_2. Olgu nüüd D kiire CP teine lõikepunkt ringjoonega c_2. Et $CP \perp BP$, siis ka $PD \perp BP$, mistõttu BD on ringjoone c_2 diameeter. Seega kolmnurk ABD on täisnurkne (täisnurgaga tipu A juures) ning kolmnurk MNP, mis saadakse sellest homoteetiaga keskpunktiga C ja teguriga $\frac{1}{2}$, on samuti täisnurkne (täisnurgaga tipu M juures).

3. *Vastus:* kõik ruudud, mis asuvad paaritu numbriga reas ja paaritu numbriga veerus.

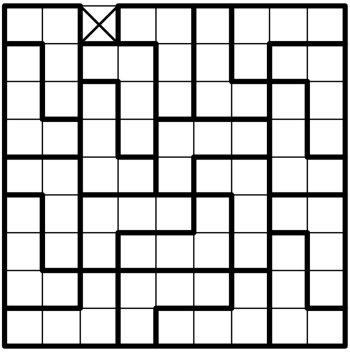
Värvime ruudustiku read vaheldumisi mustaks ja valgeks, nii et esimene ja viimane rida on mustad. Et iga kujund katab 3 üht värvi ruutu ja 1 teist värvi ruudu, siis iga kujundi lisamisel muutub mustade ja valgete katmata ruutude arvude vahe 2 võrra. Et enne katmist on see vahe 2009 ja kujundeid on paarisarv (sest arvu $2009 = 4 \cdot 502 + 1$ ruut annab 8-ga jagamisel jäägiks 1), siis lõpus ei saa see olla -1. Seega pole võimalik, et katmata jääb valge ruut, st. see ruut on must ja asub paaritu numbriga reas. Värvides ridade asemel veerge, saame analoogselt, et see ruut asub paaritu numbriga veerus.



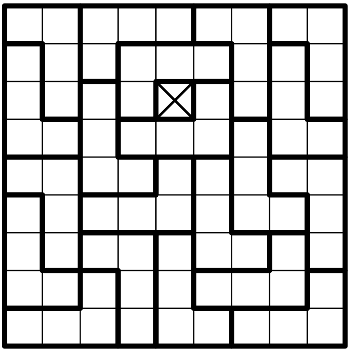
Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4



Joonis 5

Jääb üle näidata, et kõik sellised ruudud on võimalikud. Tõestame selle väite kehtivuse mistahes $n \times n$ ruudustiku korral, kus $n = 4k + 1$ ja $k \geqslant 2$. Kui $n > 9$ (ehk $k > 2$), siis iga ruut asub ruudustiku mingist kahest äärest vähemalt 4 rea või veeru kaugusel. Neis äärtes asuvad ribad laiusega 4 saame antud kujunditega katta nii, et alustame kummastki otsast 4×2 tükkide kaupa ja lõpuks jääb üle 5×5 tükk ilma ühe nurgaruuduta, mille jaoks nõutav kate on näidatud joonisel 2. Sellega oleme taandanud tõestatava väite sarnasele väitele $k-1$ jaoks. Juhul $n = 9$ jääb sümmeetriat arvestades järele 6 oluliselt erinevat ruutu. Neist 4 korral saame eespool kirjeldatud viisil taandada esmalt ülesande $n = 5$ juhule ja kasutada siis joonistel 2 ja 3 näidatud katmisviise; sobivad katmisviisid ülejäänud kahe juhu jaoks on näidatud joonistel 4 ja 5.