

Treeningvõistlus IMO-2009 võistkonnale

Tartus, 25. juunil 2009

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Milliste positiivsete täisarvude n korral leidub selline täisarvuliste kordajatega polünoom P , et $P(d) = \frac{n}{d}$ arvu n iga naturaalarvulise teguri d korral?
2. Kolmnurga ABC sisepiirkonnas valitakse punkt P nii, et $\angle BPC = 90^\circ$ ja $\angle BAP = \angle BCP$. Olgu M ja N vastavalt kolmnurga külgede AC ja BC keskpunktid. Tõesta, et kolmnurk MNP on täisnurkne.
3. Mõõtmetega 2009×2009 ruudustiku read ja veerud on nummerdatud naturaalarvudega 1 kuni 2009. Ruudustikule asetatakse 4 ühikruudust koosnevad L-kujulised kujundid (kujundeid võib ka ümber pöörata) nii, et need üksteist ei kata, ükski neist ei ulatu üle ruudustiku ääre ning täpselt üks ruudustiku ruut jääb katmata. Milline see katmata ruut võib olla?