Treeningvõistlus IMO-2008 võistkonnale

Tartus 8. juunil 2008

Ülesanded koos vastuste ja lahendustega

1. Tahvlile kirjutatakse neli täisarvu a_1, b_1, c_1 ja d_1. Edasi asendatakse igal sammul tahvlil olevad arvud nende tsükliliselt võetud vahedega, st arvude a_k, b_k, c_k ja d_k asemele kirjutatakse arvud $a_{k+1} = a_k - b_k$, $b_{k+1} = b_k - c_k$, $c_{k+1} = c_k - d_k$ ja $d_{k+1} = d_k - a_k$.

   Kas võib juhtuda, et mingi $k > 1$ korral on $|b_k c_k - a_k d_k|$, $|a_k c_k - b_k d_k|$ ja $|a_k b_k - c_k d_k|$ kõik algarvud?

   Vastus: Ei.

   Lahendus. Vastavalt a_k, b_k, c_k, d_k, kus $k > 1$, konstrueerimise tingimustele $a_k + b_k + c_k + d_k = 0$. Pannes $-d_k$ asemele $a_k + b_k + c_k$, saame

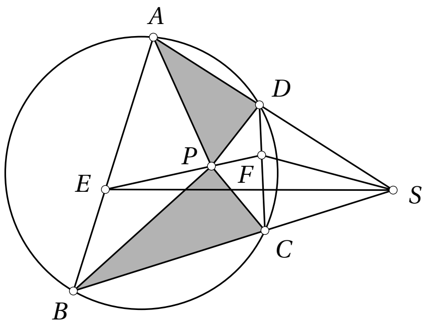
$$\begin{aligned} b_k c_k - a_k d_k &= b_k c_k + a_k(a_k + b_k + c_k) = (a_k + b_k)(a_k + c_k), \\ a_k c_k - b_k d_k &= a_k c_k + b_k(a_k + b_k + c_k) = (a_k + b_k)(b_k + c_k), \\ a_k b_k - c_k d_k &= a_k b_k + c_k(a_k + b_k + c_k) = (a_k + c_k)(b_k + c_k). \end{aligned}$$

   Järelikult

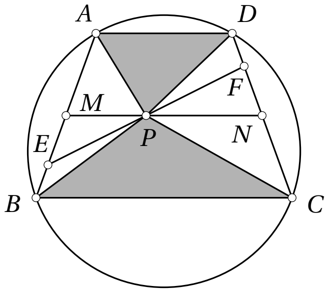
$$\begin{aligned} &|(b_k c_k - a_k d_k)| \cdot |a_k c_k - b_k d_k| \cdot |a_k b_k - c_k d_k| = \\ &\qquad = (a_k + b_k)^2 \cdot (a_k + c_k)^2 \cdot (b_k + c_k)^2 = \\ &\qquad = \big((a_k + b_k)(a_k + c_k)(b_k + c_k)\big)^2. \end{aligned}$$

   Kui $|b_k c_k - a_k d_k|$, $|a_k c_k - b_k d_k|$, $|a_k b_k - c_k d_k|$ oleksid kõik algarvud, siis nende korrutise kanoonilises esituses oleks astendajate summa 3, mis on paaritu. Kuid arv $\big((a_k + b_k)(a_k + c_k)(b_k + c_k)\big)^2$ on täisruut, mistõttu kas ta on 0 või tema kanoonilises esituses on kõik astendajad paaris ja astendajate summa seetõttu samuti paaris. Kummalgi juhul ei saa võrdus kehtida.

2. Kõõlnelinurga $ABCD$ külgedel AB ja CD valitakse vastavalt punktid E ja F nii, et $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Olgu P selline punkt lõigul EF, et $|PE| : |PF| = |AB| : |CD|$. Tõesta, et kolmnurkade APD ja BPC pindalade suhe on üks ja sama punktide E ja F mistahes sellise valiku korral, mis rahuldab eeltoodud tingimust.



Joonis 1



Joonis 2

Lahendus. Piisab näidata, et punkt P asub sirgetest AD ja BC võrdsel kaugusel, sest siis kolmnurkade APD ja BPC pindalade suhe võrdub aluste $|AD|$ ja $|BC|$ suhtega, mis ei sõltu punktide E ja F valikust.

Vaatleme algul juhtu, kus sirged AD ja BC ei ole paralleelsed (joonis 1). Olgu nende lõikepunkt S. Siis kolmnurgad ASB ja CSD on sarnased, sest $ABCD$ on kõõlnelinurk. Siis ka kolmnurgad ASE ja CSF on sarnased, sest $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Seega $\angle DSE = \angle CSF$.

Et

$$\frac{|SE|}{|SF|} = \frac{|SA|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|PE|}{|PF|},$$

siis nurgapoolitaja omadusest $\angle ESP = \angle FSP$. Sellest tulenevalt $\angle ASP = \angle BSP$, mistõttu P on sirgetest AD ja BC võrdsel kaugusel.

Jääb vaadata juhtu, kus sirged AD ja BC on paralleelsed (joonis 2). Siis $ABCD$ on trapets, milles $|AB| = |CD|$. Seega $|BE| = |DF|$. Olgu M ja N lõikude AB ja CD keskpunktid; siis ka $|ME| = |NF|$. Ilmselt E ja F asuvad sirgest MN võrdsel kaugusel.

Et P on vaadeldaval juhul lõigu EF keskpunkt, asub ta sirgel MN. Järelikult P asub sirgetest AD ja BC võrdsel kaugusel.

3. Defineerime positiivsete täisarvude järjendid R_1, R_2, ... järgmiselt: $R_1 = (1)$ ning kui $R_{n-1} = (x_1, \ldots, x_s)$, siis

$$R_n = (1, 2, \ldots, x_1, 1, 2, \ldots, x_2, \ldots, 1, 2, \ldots, x_s, n)\,.$$

Näiteks $R_2 = (1, 2)$, $R_3 = (1, 1, 2, 3)$, $R_4 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4)$.

a) Leia järjendi R_n komponentide summa.

b) Tõesta, et alati, kui $n > 1$ ja k ei ületa järjendi R_n komponentide arvu, siis järjendi R_n vasakult lugedes k. komponent on 1 siis ja ainult siis, kui paremalt lugedes k. komponent ei ole 1.

Lahendus. Nimetame naturaalarvude järjendi $(a_1, \ldots, a_l)$ *arenduseks* järjendit $(1, \ldots, a_1, \ldots \ldots, 1, \ldots, a_l)$. Siis iga $i \geqslant 1$ korral on järjend R_{i+1} järjendi R_i arendus, millele on lõppu lisatud arv $i + 1$.

Grupeerime järjendite R_1, R_2, ... komponendid lõikudeks selle järgi, millisest arvust on arvud arendamisprotsessis „alguse saanud“. Nii on järjendis R_i täpselt i arvulõiku. Täpsemalt, järjendi R_i viimane arv i moodustab omaette lõigu, sest tema pole kuskilt „algust saanud“, ja 1. kuni $(i - 1)$. lõigud on järjendi R_{i-1} vastava numbriga lõikude arendused. Näiteks

$$
\begin{array}{llllll}
R_1: & 1 & & & & \\
R_2: & 1, & 2 & & & \\
R_3: & 1, & 1,2, & 3 & & \\
R_4: & 1, & 1,1,2, & 1,2,3, & 4 & \\
R_5: & 1, & 1,1,1,2, & 1,1,2,1,2,3, & 1,2,3,4, & 5 \\
\multicolumn{6}{l}{\dotfill}
\end{array}
.
$$

Tähistagu $L_{n,k}$ järjendi R_n järjekorras k-ndat lõiku.

Ilmselt $L_{n,1} = (1)$ iga $n \geqslant 1$ korral. Veel on selge, et iga $n \geqslant 2$ korral $L_{n,n-1} = (1, \ldots, n - 1)$. Näitame nüüd, et alati, kui $1 < k < n$, on $L_{n,k}$ saadav $L_{n-1,k-1}$ ja $L_{n-1,k}$ järjestkirjutamisel. Tõestame selle väite induktsiooniga $n - k$ järgi.

Kui $n - k = 1$, siis $L_{n,k} = L_{n,n-1} = (1, \ldots, n - 1)$, samas aga $L_{n-1,k-1} = L_{n-1,n-2} = (1, \ldots, n-2)$ ja $L_{n-1,k} = L_{n-1,n-1} = (n-1)$, seega sel juhul peab väide paika. Muudel juhtudel kehtib induktsiooni eeldus $L_{n-1,k}$ kohta, järelikult ta on lõikude $L_{n-2,k-1}$ ja $L_{n-2,k}$ järjestkirjutus. Seega ka tema arendus $L_{n,k}$ on vastavate arenduste $L_{n-1,k-1}$ ja $L_{n-1,k}$ järjestkirjutus, ehk väide kehtib ka $L_{n,k}$ kohta.

a) Uurime algul järjendite R_i komponentide arvu, teeme seda lõikude kaupa. Et $L_{n,k}$, kus $1 < k < n$, on $L_{n-1,k-1}$ ja $L_{n-1,k}$ järjestkirjutus, siis $L_{n,k}$ komponentide arv on $L_{n-1,k-1}$ ja $L_{n-1,k}$ komponentide arvude summa. Lisaks $L_{n,1}$ ja $L_{n,n}$ sisaldavad täpselt 1 komponendi. Need seosed vastavad kombinatsioonide arvude arvutamise reeglitele $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ning $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, kui järjendeid ja lõike nummerdada 0-st alates. Seega $L_{n,k}$ komponentide arv on $\binom{n-1}{k-1}$ ning R_n komponentide arv on $\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}$ ehk 2^{n-1}.

Kuid on selge, et iga järjendi arenduse komponentide arv võrdub selle järjendi enda komponentide summaga (arenduses on algse järjendi iga komponendi asemel nii mitu komponenti, kui suur see komponent ise on). Seega järjendi R_{n+1} komponentide arv on 1 võrra suurem kui R_n komponentide summa. Seega R_n komponentide summa on $2^n - 1$.

b) Tõestame väite induktsiooniga kauguse järgi järjendi äärest.

Väide kehtib äärmiste komponentide jaoks: vasakpoolseim komponent on 1, parempoolseim on $n > 1$. Vaatleme suvalist muud komponentide paari järjendis R_n, mis on oma äärtest ühekaugusel. Vastavalt leitud seosele kombinatsioonide arvudega on lõikude komponentide arvud kummaltki poolt lugedes samad (sest $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$). Seega lõigud, milles asuvad valitud komponendid, on samuti teineteise suhtes sümmeetriliselt asetatud.

Vastavalt eespool tõestatule saame kummagi lõigu esitada järjendi R_{n-1} kahe lõigu järjestkirjutusena. Muidugi ka need kaks lõigupaari asetsevad oma järjendi suhtes sümmeetriliselt, samuti kui vaadeldavad komponendid asetsevad nende lõigupaaride suhtes sümmeetrilistes positsioonides. Seega nad on ka kogu järjendi suhtes sümmeetrilistes positsioonides. Aga selles järjendis on nad äärtele lähemal, mistõttu induktsiooni eelduse järgi on üks võrdne 1-ga parajasti siis, kui teine ei ole võrdne 1-ga. Seda oligi tarvis tõestada.