Treeningvõistlus IMO-2008 võistkonnale

Tartus, 8. juunil 2008

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tahvlile kirjutatakse neli täisarvu a_1, b_1, c_1 ja d_1. Edasi asendatakse igal sammul tahvlil olevad arvud nende tsükliliselt võetud vahedega, st. arvude a_k, b_k, c_k ja d_k asemele kirjutatakse arvud $a_{k+1} = a_k - b_k$, $b_{k+1} = b_k - c_k$, $c_{k+1} = c_k - d_k$ ja $d_{k+1} = d_k - a_k$.

   Kas võib juhtuda, et mingi $k > 1$ korral on $|b_k c_k - a_k d_k|$, $|a_k c_k - b_k d_k|$ ja $|a_k b_k - c_k d_k|$ kõik algarvud?

2. Kõõlnelinurga $ABCD$ külgedel AB ja CD valitakse vastavalt punktid E ja F nii, et $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Olgu P selline punkt lõigul EF, et $|PE| : |PF| = |AB| : |CD|$. Tõesta, et kolmnurkade APD ja BPC pindalade suhe on üks ja sama punktide E ja F mistahes sellise valiku korral, mis rahuldab eeltoodud tingimust.

3. Defineerime positiivsete täisarvude järjendid R_1, R_2, …järgmiselt: $R_1 = (1)$ ning kui $R_{n-1} = (x_1, \ldots, x_s)$, siis

   $$R_n = (1, 2, \ldots, x_1, 1, 2, \ldots, x_2, \ldots, 1, 2, \ldots, x_s, n).$$

   Näiteks $R_2 = (1, 2)$, $R_3 = (1, 1, 2, 3)$, $R_4 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4)$.

   a) Leia järjendi R_n komponentide summa.

   b) Tõesta, et alati, kui $n > 1$ ja k ei ületa järjendi R_n komponentide arvu, siis järjendi R_n vasakult lugedes k. komponent on 1 siis ja ainult siis, kui paremalt lugedes k. komponent ei ole 1.