Treeningvõistlus IMO-2007 võistkonnale

Ülesanded koos vastuste ja lahendustega

1. *(Hiina 1999)*

Kuup mõõtmetega $4 \times 4 \times 4$ koostatakse 64 nummerdatud ühikkuubist (ühikkuubi number määrab selle asukoha koostatavas suures kuubis). Mitmel eri viisil saab värvida 16 ühikkuupi punaseks nii, et koostatavas suures kuubis iga $1 \times 1 \times 4$ ühikkuubist koosnev risttahukas sisaldaks täpselt ühe punase ühikkuubi?

Vastus: 576.

Lahendus. Vaatleme kuubi alumist külge 4×4 ruudustikuna ning kirjutame selle igasse ruutu arvu 1 kuni 4 vastavalt punase kuubi asukohale sellele ruudule toetuvas vertikaalses $1 \times 1 \times 4$ risttahukas. Kõik horisontaalsed $1 \times 1 \times 4$ risttahukad sisaldavad samuti täpselt ühe punase kuubi siis ja ainult siis, kui selle ruudustiku igas reas ja igas veerus on kõik arvud erinevad. Jääb üle leida 4×4 ruudustiku sellise omadusega täitmisviiside arv.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Leiame esmalt sobivate täitmisviiside arvu lisatingimusel, et ruudustiku esimeses reas ja esimeses veerus on arvud 1 kuni 4 mingis fikseeritud järjekorras. Et ridade järjekorra vahetamisel säilitab ruudustik nõutava omaduse, siis võime üldisust kitsendamata vaadelda juhtu, kus ruudustiku esimeses veerus on arvud samas järjekorras nagu esimeses reas (samast nurgast alates). Olgu see järjekord 1, 2, 3, 4, siis teise rea ja teise veeru ristumiskohas saab olla 1, 3 või 4. Näeme, et ülejäänud ruutude nõutaval viisil täitmiseks on 1 korral kaks võimalust ning 3 ja 4 korral kummalgi juhul üksainus võimalus. Seega kokku on sobivaid täitmisviise esimese rea ja veeru arvude mingi fikseeritud järjekorra korral 4.

Arvude järjekorra valikuks esimeses reas ja esimeses veerus on $4! \cdot 3!$ võimalust, seega on nõutava omadusega värvimisi kokku $4 \cdot 4! \cdot 3! = 576$.

2. *(Vietnam 1999)*

Jadad (x_n) ja (y_n) määratakse järgmiste seostega:

$$x_1 = 1\,,\ y_1 = 2\,;$$
$$x_{n+1} = 22y_n - 15x_n\,,\ y_{n+1} = 17y_n - 12x_n \text{ iga } n \geqslant 1 \text{ korral.}$$

a) Tõesta, et jadade (x_n) ja (y_n) ükski liige ei ole 0.

b) Tõesta, et kummaski jadas (x_n) ja (y_n) on lõpmata palju positiivseid liikmeid ja lõpmata palju negatiivseid liikmeid.

c) Olgu $N = 2007^{2007}$. Tee kindlaks, kas x_N ja y_N jaguvad 7-ga.

Vastus: c) x_N jagub 7-ga ning y_N ei jagu.

Lahendus. a) Esimesest rekursiivsest seosest saame, et $22y_n = 15x_n + x_{n+1}$ ja samuti $22y_{n+1} = 15x_{n+1} + x_{n+2}$. Asendades need 22-ga läbikorrutatud teise rekursiivsesse seosesse, saame

$$15x_{n+1} + x_{n+2} = 17 \cdot (15x_n + x_{n+1}) - 22 \cdot 12x_n\ ,$$

kust

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 9x_n\ . \tag{1}$$

Analoogiliselt saame teisest rekursiivsest seosest $12x_n = 17y_n - y_{n+1}$ ja samuti $12x_{n+1} = 17y_{n+1} - y_{n+2}$. Asendades need 12-ga läbikorrutatud esimesse rekursiivsesse seosesse, saame

$$17y_{n+1} - y_{n+2} = 12 \cdot 22y_n - 15 \cdot (17y_n - y_{n+1}) ,$$

kust

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - 9y_n . \tag{2}$$

Seosest (1) näeme, et x_n ja x_{n+2} on alati sama paarsusega. Et $x_1 = 1$ ja $x_2 = 29$, siis on kõik x_n paaritud ja seega nullist erinevad.

Seosest (2) näeme, et kui y_{n+1} on paaris ja y_n annab 4-ga jagamisel jäägi 2, siis ka y_{n+2} annab 4-ga jagamisel jäägi 2. Et $y_1 = 2$ ja $y_2 = 22$, siis kõik y_n annavad 4-ga jagamisel jäägi 2 ning on seega nullist erinevad.

b) Rakendades kaks korda seost (1) leiame, et

$$x_{n+3} = 2 \cdot (2x_{n+1} - 9x_n) - 9x_{n+1} = -5x_{n+1} - 18x_n .$$

Niisiis, kui mingid kaks järjestikust liiget x_n ja x_{n+1} on sama märgiga, siis x_{n+3} on vastupidise märgiga. Sama väide kehtib ka jada (y_n) jaoks. Siit näeme, et kumbki neist jadadest sisaldab lõpmata palju kummagi märgiga liikmeid.

c) Järgnevalt olgu kõik vaadeldavad kongruentsid modulo 7. Paneme tähele, et kui $x_{n+1} \equiv x_n \not\equiv 0$, siis

$$(x_{n+2},\, x_{n+3},\, x_{n+4},\, x_{n+5}) \equiv (0,\, 5x_n,\, 3x_n,\, 3x_n) ,$$

kus $5x_n \not\equiv 0$ ja $3x_n \not\equiv 0$. Kuna $x_1 \equiv x_2 \equiv 1$, siis järeldub siit, et $x_n \equiv 0$ siis ja ainult siis, kui n annab 4-ga jagamisel jäägi 3. Et arv $N = 2007^{2007}$ on selline, siis x_N jagub 7-ga.

Näitame nüüd, et jada (y_n) ükski liige ei jagu 7-ga. Seosest (2) saame, et

$$2y_n \equiv 9y_n = 2y_{n+1} - y_{n+2} ,$$

kust

$$8y_n \equiv 8y_{n+1} - 4y_{n+2}$$

ehk

$$y_n \equiv y_{n+1} + 3y_{n+2} \ .$$

Seega, kui mingi $m > 4$ korral $y_m \equiv 0$, siis

$$(y_{m-2},\, y_{m-3},\, y_{m-4}) \equiv (y_{m-1},\, 4y_{m-1},\, 0) \ ,$$

st. leidub väiksema indeksiga liige $y_{m-4} \equiv 0$. Et teisalt aga

$$(y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4) \equiv (2,\, 1,\, 5,\, 1) \ ,$$

siis järelikult ükski liige y_n ei jagu 7-ga, sealhulgas ka mitte y_N.

3. *(Korea 1998)*

Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F. Lõigaku kiired AD, BE ja CF kolmnurga ABC ümberringjoont teistkordselt vastavalt punktides P, Q ja R. Tõesta, et punktide D, E ja F mistahes valiku korral kehtib võrratus

$$\frac{|AD|}{|PD|} + \frac{|BE|}{|QE|} + \frac{|CF|}{|RF|} \geqslant 9 \ .$$

Millisel juhul kehtib siin võrdus?

Vastus: võrdus kehtib, kui kolmnurk ABC on võrdkülgne ning D, E ja F on selle külgede keskpunktid.

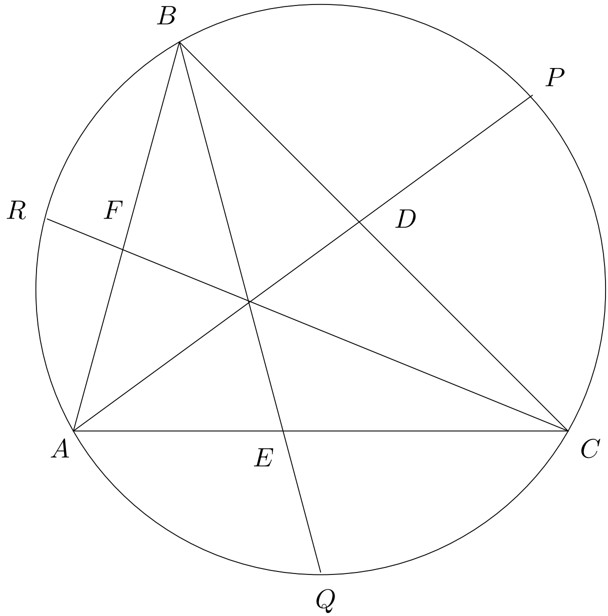
Lahendus. Fikseeritud kolmnurga ABC korral $\dfrac{|AD|}{|PD|} = \dfrac{d(A,\, BC)}{d(P,\, BC)}$, kus $d(X,\, YZ)$ tähistab punkti X kaugust sirgest YZ. Selle murru lugeja ei sõltu punkti D valikust ning nimetaja on maksimaalne siis, kui punkt P paikneb kaare BC keskpunktis, st. kui AD on nurgapoolitaja.

Niisiis piisab tõestada antud võrratus juhu jaoks, kus AD, BE ja CF on nurgapoolitajad. Siis

$$\angle PBD = \angle PAC = \angle PAB \ ,$$

mistõttu kolmnurgad PBD ja PAB on sarnased ning

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|PB|}{|PD|} = \Big(\frac{|PA|}{|PB|}\Big)^2 = \Big(\frac{|AB|}{|BD|}\Big)^2 .$$



Analoogiliselt $\dfrac{|QB|}{|QE|} = \Big(\dfrac{|BC|}{|CE|}\Big)^2$ ja $\dfrac{|RC|}{|RF|} = \Big(\dfrac{|CA|}{|AF|}\Big)^2$. Olgu $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $c = |AB|$, siis nurgapoolitaja omaduse tõttu $\dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{b+c}{a}$ ning samuti $\dfrac{|BC|}{|CE|} = \dfrac{c+a}{b}$ ja $\dfrac{|CA|}{|AF|} = \dfrac{a+b}{c}$. Seega

$$\begin{aligned}
\frac{|PA|}{|PD|} + \frac{|QB|}{|QE|} + \frac{|RC|}{|RF|} &= \frac{(b+c)^2}{a^2} + \frac{(c+a)^2}{b^2} + \frac{(a+b)^2}{c^2} = \\
&= \frac{(b^4c^2 + b^2c^4 + c^4a^2 + c^2a^4 + a^4b^2 + a^2b^4) + 2(b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3)}{a^2b^2c^2} \geqslant \\
&\geqslant \frac{6\sqrt[6]{a^{12}b^{12}c^{12}} + 2 \cdot 3\sqrt[3]{a^6b^6c^6}}{a^2b^2c^2} = 12\,,
\end{aligned}$$

kust

$$\frac{|AD|}{|PD|} + \frac{|BE|}{|QE|} + \frac{|CF|}{|RF|} = \Big(\frac{|PA|}{|PD|} - 1\Big) + \Big(\frac{|QB|}{|QE|} - 1\Big) + \Big(\frac{|RC|}{|RF|} - 1\Big) \geqslant 9\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui AD, BE ja CF on nurgapoolitajad ning $a = b = c$, st. kolmnurk ABC on võrdkülgne (et kehtiks võrdus ka viimati kasutatud võrratuses aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahel).

Märkus. Lahenduse lõpuosas võime esmalt kasutada ka aritmeetilise keskmise ja ruutkeskmise vahelist võrratust:

$$\frac{|PA|}{|PD|} + \frac{|QB|}{|QE|} + \frac{|RC|}{|RF|} = \left(\frac{|AB|}{|BD|}\right)^2 + \left(\frac{|BC|}{|CE|}\right)^2 + \left(\frac{|CA|}{|AF|}\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{|AB|}{|BD|} + \frac{|BC|}{|CE|} + \frac{|CA|}{|AF|}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2}{abc}\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}}{abc}\right)^2 = \frac{36}{3} = 12\,.$$