

Treeningvõistlus IMO-2007 võistkonnale

Käärikul, 10. juulil 2007

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutiit kasutada ei lubata.

1. Kuup mõõtmetega $4 \times 4 \times 4$ koostatakse 64 nummerdatud ühikkuubist (ühikkuubi number määrab selle asukoha koostatavas suures kuubis). Mitmeli eri viisil saab värvida 16 ühikkuupi punaseks nii, et koostatavas suures kuubis iga $1 \times 1 \times 4$ ühikkuubist koosnev risttahukas sisaldaks täpselt ühe punase ühikkuubi?
2. Jadad (x_n) ja (y_n) määratakse järgmiste seostega:

$$x_1 = 1, y_1 = 2;$$

$$x_{n+1} = 22y_n - 15x_n, y_{n+1} = 17y_n - 12x_n \text{ iga } n \geq 1 \text{ korral.}$$

- a) Tõesta, et jadade (x_n) ja (y_n) ükski liige ei ole 0.
 - b) Tõesta, et kummaski jadas (x_n) ja (y_n) on lõpmata palju positiivseid liikmeid ja lõpmata palju negatiivseid liikmeid.
 - c) Olgu $N = 2007^{2007}$. Tee kindlaks, kas x_N ja y_N jaguvad 7-ga.
3. Kolmnurga ABC külgedel BC , CA ja AB võetakse vastavalt punktid D , E ja F . Lõigaku kiired AD , BE ja CF kolmnurga ABC ümberringjoont teistkordselt vastavalt punktides P , Q ja R . Tõesta, et punktide D , E ja F mistahes valiku korral kehtib võrratus

$$\frac{|AD|}{|PD|} + \frac{|BE|}{|QE|} + \frac{|CF|}{|RF|} \geq 9.$$

Millisel juhul kehtib siin võrdus?