Treeningvõistlus IMO-2007 võistkonnale

Ülesanded koos vastuste ja lahendustega

1. *(USA 1999)*

Mõõtmetega $n \times n$ ruudustikus värvitakse mõned ruudud mustaks ja kõik ülejäänud valgeks nii, et on täidetud järgmised tingimused:

i) Igal valgel ruudul on ühine külg mingi musta ruuduga.

ii) Mistahes kahe musta ruudu korral leidub selline järjend mustadest ruutudest, mille esimeseks ja viimaseks ruuduks on need kaks ruutu ning mille igal kahel järjestikusel ruudul on ühine külg.

Tõesta, et ruudustikus on vähemalt $\dfrac{n^2-2}{3}$ musta ruutu.

Lahendus. Piisab tõestada järgmine väide: kui $n \times n$ ruudustikus on m ruutu värvitud mustaks nii, et kehtib tingimus (ii), siis värvitud ruute ja nendega ühist külge omavaid ruute kokku on ülimalt $3m+2$.

Tõestame selle väite induktsiooniga m järgi. Väide kehtib ilmselt $m = 1$ korral (on 1 värvitud ruut ja 4 sellega ühist külge omavat ruutu, kokku 5 ruutu). Olgu nüüd nõutaval viisil värvitud m ruutu — näitame, et värvitud ruutude hulgas leidub alati selline, mille eemaldamisel jääb tingimus (ii) kehtima. Selleks vaatleme graafi G, mille tippudeks on värvitud ruudud ning kaks tippu on ühendatud servaga siis ja ainult siis, kui neile vastavatel ruutudel on ühine külg. Tingimus (ii) tähendab, et selline graaf G on sidus. Vaatleme selle graafi aluspuud ja eemaldame graafist G tipu, millest aluspuus lähtub üksainus serv (selline tipp leidub igas vähemalt 2 tipuga puus). Kuna pärast sellist operatsiooni jääb aluspuu sidusaks, säilib ka graafi G sidusus.

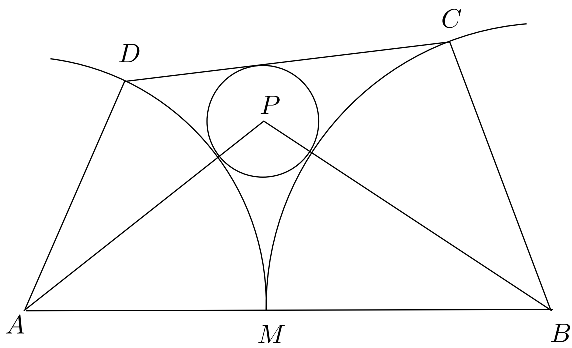
Niisiis saame antud m värvitud ruudu hulgast alati ühe ruudu eemaldada nii, et allesjäävad $m-1$ värvitud ruutu rahuldavad tingimust (ii). Vastavalt induktsiooni eeldusele on neid ruute ja nendega ühiseid külgi omavaid ruute siis kokku ülimalt $3(m-1)+2 = 3m-1$. Et eemaldatud ruuduga ühist külge omavatest ruutudest vähemalt üks on värvitud ja see ruut ise on juba arvesse võetud kui värvitud ruuduga ühist külge omav ruut, siis lisandub aeemaldatud ruudu tagasipanekul ülimalt 3 “arvesseminevat” ruutu ja väide jääb kehtima ka m korral.

2. *(IMO 1989, ül. 4)*

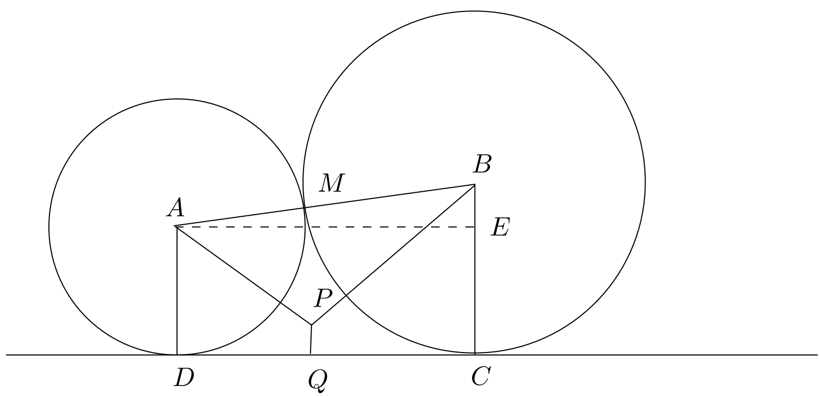
Kumeras nelinurgas $ABCD$ on $|AB| = |AD| + |BC|$. Nelinurga sisepiirkonnas paikneb punkt P, mille kaugus sirgest CD on ρ ning $|AP| = |AD| + \rho$ ja $|BP| = |BC| + \rho$. Tõesta, et

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}} .$$

Lahendus. Konstrueerime ringjooned keskpunktidega A ja B, mis läbivad vastavalt punkte D ja C. Vastavalt ülesande tingimustele puutuvad need ringjooned teineteist külje AB mingis sisepunktis M ning kolmas ringjoon keskpunktiga P ja raadiusega ρ puutub väliselt kaht esimest ringjoont ja puutub ka nelinurga külge CD. Kolmanda ringjoone raadius ρ on seejuures võimalikest suurim siis, kui CD on kahe esimese ringjoone ühine puutuja.



Olgu kahe esimese ringjoone raadiused vastavalt $r = |AM| = |AD|$ ja $R = |BM| = |BC|$ ning olgu Q kolmanda ringjoone puutepunkt kahe esimese ringjoone ühise puutujaga CD. Üldisust kitsendamata eeldame, et $r \leqslant R$; olgu lisaks E punkti A ristprojektsioon lõigule BC.



Siis ühelt poolt

$$|AE| = \sqrt{|AB|^2 - |BE|^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}\,.$$

Teisalt aga

$$\begin{aligned}|AE| &= |CD| = |CQ| + |QD| = \\ &= \sqrt{(r+\rho)^2 - (r-\rho)^2} + \sqrt{(R+\rho)^2 - (R-\rho)^2} = \\ &= 2\sqrt{r\rho} + 2\sqrt{R\rho}\,.\end{aligned}$$

Niisiis vaadeldaval juhul $\sqrt{Rr} = \sqrt{r\rho} + \sqrt{R\rho}$, ehk

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}\,.$$

Üldjuhul (kui sirge CD ei tarvitse olla kahe esimese ringjoone ühine puutuja) saab kolmanda ringjoone raadius ρ olla ainult väiksem: seega alati

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}\,.$$

3. *(Vietnam 1998)*

Olgu k fikseeritud täisarv. Jada (a_n) on määratud järgmiste seostega:

$$\begin{aligned}&a_0 = 1\,,\ a_1 = k\,,\ a_2 = 2k+1\,;\\ &a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n\,,\ \text{kui } n \geqslant 0.\end{aligned}$$

a) Leia selle jada üldliikme a_n avaldis.
b) Leia kõik sellised täisarvud k, mille korral lõpmata palju jada (a_n) liikmeid on täisarvude ruudud.

Vastus: a) $a_n = n^2 + (k-2)n + 1$; b) $k = 0$ ja $k = 4$.

Lahendus. a) On lihtne kontrollida, et avaldis $a_n = An^2 + Bn + C$ rahuldab ülesandes antud rekurrentset seost mistahes arvude A, B ja C korral. Jääb üle leida kordajad A, B, C nii, et ka jada esimesed liikmed oleksid sobivad. Seostest

$$\begin{aligned}a_0 &= C = 1\,,\\ a_1 &= A + B + C = k\,,\\ a_2 &= 4A + 2B + C = 2k+1\end{aligned}$$

saame, et $A = C = 1$ ja $B = k - 2$.

b) Näitame, et ruutpolünoomi n^2+an+b väärtuste hulgas on täisruute kuitahes suurte naturaalarvuliste n väärtuste korral parajasti siis, kui see polünoom on mingi täisarvuliste kordajatega lineaarpolünoomi ruut

$$n^2 + an + b = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Tõepoolest: kui a on paaritu, siis küllalt suure n korral kehtivad võrratused

$$-n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 < b < n + \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 ,$$

mistõttu

$$\left(n + \frac{a-1}{2}\right)^2 < n^2 + an + b < \left(n + \frac{a+1}{2}\right)^2 ,$$

s.t. n^2+an+b paikneb kahe järjestikuse täisruudu vahel ega saa olla täisruut.

Olgu nüüd a paaris, siis küllalt suure n korral kehtivad võrratused

$$-2n + \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 < b < 2n + \left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 ,$$

mistõttu

$$\left(n + \frac{a}{2} - 1\right)^2 < n^2 + an + b < \left(n + \frac{a}{2} + 1\right)^2 ,$$

s.t. kui n^2+an+b on täisruut, siis peab olema $n^2+an+b = \left(n+\frac{a}{2}\right)^2$. Et see seos kehtib lõpmata paljude n väärtuste korral, siis peab siin olema tegemist polünoomide võrdsusega.

Leiame nüüd sobivad k väärtused. Võrdusest

$$n^2 + (k-2)n + 1 = \left(n + \frac{k}{2} - 1\right)^2$$

saame, et $\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2 = 1$, ehk $k^2 = 4k$, kust $k = 0$ või $k = 4$.