Treeningvõistlus IMO-2007 võistkonnale

Tartus, 26. juunil 2007

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Mõõtmetega $n \times n$ ruudustikus värvitakse mõned ruudud mustaks ja kõik ülejäänud valgeks nii, et on täidetud järgmised tingimused:
   i) Igal valgel ruudul on ühine külg mingi musta ruuduga.
   ii) Mistahes kahe musta ruudu korral leidub selline järjend mustadest ruutudest, mille esimeseks ja viimaseks ruuduks on need kaks ruutu ning mille igal kahel järjestikusel ruudul on ühine külg.

   Tõesta, et ruudustikus on vähemalt $\dfrac{n^2-2}{3}$ musta ruutu.

2. Kumeras nelinurgas $ABCD$ on $|AB| = |AD| + |BC|$. Nelinurga sisepiirkonnas paikneb punkt P, mille kaugus sirgest CD on ρ ning $|AP| = |AD| + \rho$ ja $|BP| = |BC| + \rho$. Tõesta, et

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}} .$$

3. Olgu k fikseeritud täisarv. Jada (a_n) on määratud järgmiste seostega:

$$a_0 = 1\,,\ a_1 = k\,,\ a_2 = 2k+1\,;$$
$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n\,,\ \text{kui } n \geqslant 0.$$

   a) Leia selle jada üldliikme a_n avaldis.
   b) Leia kõik sellised täisarvud k, mille korral lõpmata palju jada (a_n) liikmeid on täisarvude ruudud.