Treeningvõistlus IMO-2006 võistkonnale

Tartus, 12. juunil 2006

Ülesanded ja lahendused.

1. Leia kõik reaalarvude paarid $(a,\, b)$, mille korral võrrandisüsteemil

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a\,, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b$$

on vähemalt üks reaalarvuline lahend $(x,\, y)$.

Vastus: $a = b = 0$ ning kõik paarid $(a,\, b)$, kus $0 < ab \leqslant \frac{9}{8}$.

Lahendus. Kui antud süsteemil on mingite väärtuste $a = A$ ja $b = B$ korral lahend $(x,\, y)$, siis on tal ka $a = \frac{A}{k}$ ja $b = kB$ korral lahend $(kx,\, ky)$, kus k on mistahes nullist erinev reaalarv. Seega oleneb lahendi olemasolu mingite a ja b väärtuste korral üksnes korrutisest ab, ning üldisust kitsendamata võime vaadelda ainult juhtu, kus $x^2 + y^2 = 1$.

Uurime nüüd funktsiooni

$$P(x,y) = \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

mille väärtus on parajasti paarile $(x,\, y)$ vastav korrutis ab. Eeldades täiendavalt, et $x^2 + y^2 = 1$, saame

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (x+y)(x^3+y^3) = (x+y)^2(x^2-xy+y^2) = \\ &= (x^2+2xy+y^2)(1-xy) = (1+2xy)(1-xy)\,. \end{aligned}$$

Eeldusel, et $x^2 + y^2 = 1$, saab korrutis xy omandada väärtusi lõigult $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Seega jääb meil üle leida funktsiooni $f(t) = (1+2t)(1-t)$ väärtuste piirkond, kui $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$. Esitades $f(t)$ kujul

$$f(t) = -2t^2 + t + 1 = -2\Big(t - \frac{1}{4}\Big)^2 + \frac{9}{8}\,,$$

leiame kergesti, et see väärtuste piirkond on $\left[0, \frac{9}{8}\right]$. Seega, kui ülesandes antud võrrandisüsteemil on lahend, siis peavad a ja b rahuldama tingimust $0 \leqslant ab \leqslant \frac{9}{8}$. Seejuures on lihtne näha, et kui $ab = 0$, siis peab olema $a = b = 0$.

Olgu nüüd a ja b suvalised sellised reaalarvud, et $0 < ab \leqslant \frac{9}{8}$. Siis vastavalt ülalpool tõestatule leiduvad sellised reaalarvud u ja v, et $u^2 + v^2 = 1$ ning $(u + v)(u^3 + v^3) = ab$. Olgu $u + v = a'$ ja $u^3 + v^3 = b'$, siis $a'b' = ab \neq 0$, mistõttu $a = \frac{a'}{k}$ ja $b = kb'$ mingi reaalarvu $k \neq 0$ korral. Vastavalt lahenduse esimeses lõigus öeldule on siis $x = ku$, $y = kv$ otsitav lahend a ja b jaoks.

2. Kolmnurga ABC küljel AC valitakse punkt B_1 ning küljel AB valitakse punkt C_1. Lõigud BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis D. Tõesta, et AB_1DC_1 on puutujanelinurk (s.t. leidub ringjoon, mis puutub selle kõiki nelja külge) siis ja ainult siis, kui kolmnurkade ABD ja ACD siseringjooned puutuvad teineteist.

Lahendus. Puutugu kolmnurkade ABD ja ACD siseringjooned lõiku AD vastavalt punktides T_1 ja T_2. Siis $|DT_1| = \frac{1}{2}(|DA| + |DB| - |AB|)$ ja $|DT_2| = \frac{1}{2}(|DA| + |DC| - |AC|)$.

Oletame kõigepealt, et AB_1DC_1 on puutujanelinurk. Puutugu nelinurga AB_1DC_1 siseringjoon selle külgi AB_1, B_1D, DC_1 ja C_1A vastavalt punktides E, F, G ja H. Puutujalõikude võrdsusest saame, et

$$\begin{aligned} |AB| - |BD| &= (|AH| + |HB|) - (|BF| - |DF|) = \\ &= (|AH| + |BF|) - (|BF| - |DF|) = |AH| + |DF| \end{aligned}$$

ning analoogiliselt $|AC| - |CD| = |AE| + |DG|$. Et puutujalõikude võrdsuse tõttu $|AH| + |DF| = |AE| + |DG|$, siis saime, et $|AB| - |BD| = |AC| - |CD|$ ning seega $|DT_1| = |DT_2|$. Niisiis $T_1 = T_2$, mis tähendab, et kolmnurkade ABD ja ACD siseringjooned puutuvad teineteist.

Puutugu nüüd kolmnurkade ABD ja ACD siseringjooned teineteist. Siis $|DA| + |DB| - |AB| = |DA| + |DC| - |AC|$, ehk $|DB| - |AB| = |DC| - |AC|$.

Olgu ω kolmnurga ABB_1 siseringjoon ning olgu D' lõigu BB_1 selline sisepunkt, et sirge CD' puutub ringjoont ω. Oletame vastuväiteliselt, et $D' \neq D$. Olgu C_2 sirge CD' lõikepunkt küljega AB, siis $AB_1D'C_2$ on puutujanelinurk ning vastavalt eespool tõestatule kolmnurkade ABD' ja ACD' siseringjooned puutuvad teineteist, mistõttu $|D'B| - |AB| = |D'C| - |AC|$. Seega $|DD'| = |DB| - |D'B| = |DC| - |D'C|$, mis on vastuolus kolmnurga võrratusega kolmnurgas $DD'C$.

3. Kaks mängijat mängivad SOS-mängu, kirjutades $1 \times n$ ruudust ($n > 100$) koosneva mängulaua ruutudesse kordamööda tähti. Käigul olev mängija valib suvalise ühe veel tühja ruudu ning kirjutab sinna tähe S või O. Võidab mängija, kelle käigu järel moodustub esmakordselt mingis kolmes kõrvutises ruudus olevatest tähtedest sõna SOS. Kui kõik ruudud saavad täidetud ilma, et sõna SOS oleks tekkinud, jääb mäng viiki.

Tõesta, et iga n korral on ühel mängijatest olemas võitev strateegia, ning leia kõik n väärtused, mille korral võitev strateegia on alustajal.

Vastus: alustajal on võitev strateegia paarituarvuliste n korral.

Lahendus. Nimetame mängulaual olevat seisu *stabiilseks*, kui see ei sisalda sõna SOS ning käiguloleval mängijal ei ole võimalik seda ühe käiguga tekitada; vastasel korral nimetame seisu *ebastabiilseks*. Stabiilse seisu korral nimetame tühja ruutu *kriitiliseks*, kui sellesee ükskõik kumma tähe kirjutamine tekitaks ebastabiilse seisu. Niisiis käigulolev mängija on kaotanud (tema vastane saab oma järgmise käiguga võita) parajasti siis, kui kõik järelejäänud tühjad ruudud on kriitilised – vastasel juhul on talle tagatud veel vähemalt üks käik.

Näitame kõigepealt, et tühi ruut on kriitiline siis ja ainult siis, kui see asetseb neljast ruudust koosnevas blokis, mille äärmistes ruutudes on S ja keskmised ruudud on tühjad: S_ _S. Tõepoolest, kuna kriitilisse ruutu O kirjutamine muudab stabiilse seisu ebastabiilseks, siis peab selle kõrval ühel pool olema S ja teisel pool tühi ruut. Kuna ka samasse ruutu S kirjutamine muudab stabiilse seisu ebastabiilseks, siis peab selle tühja naaberruudu järel olema jällegi S.

Tõestatud väitest järeldub muuhulgas, et kriitilisi ruute on mängulaual alati paarisarv. Näitame nüüd, et kui mängulaual on piisavalt palju ruute ($n > 100$ on kindlasti piisav), siis on alati võitev strateegia sellel mängijal, kelle käigul olles on laual paaritu arv tühje ruute — paarituarvulise n korral on see alustaja ja paarisarvulise n korral tema vastane.

Sobiv strateegia on järgmine:

(a) Kui mingil käigul on laual ebastabiilne seis, siis teha võitev käik. Kui seis on stabiilne, käia järgnevate reeglite järgi.

(b) Oma esimesel käigul kirjutada S ruutu, mis on laua otsast lugedes vähemalt neljas ning mille ja alustaja avakäigul täidetud ruudu vahel (kui vaadeldav mängija ei ole ise alustaja) on vähemalt 5 tühja ruutu.

(c) Oma teisel käigul kirjutada S ruutu, mis on esimese käigu ruudust kolme ruudu kaugusel, nii et nende vahele jääb kaks tühja ruutu ning seis jääb stabiilseks. Esimese käigu ruudu valik punktis (b) tagab, et selline ruut leidub.

(d) Igal järgmisel käigul kirjutada sobiv täht suvalisse mittekriitilisse tühja ruutu, nii et seis jääb stabiilseks. Kuna vaadeldava mängija käigul olles on tühje ruute paaritu arv ning kriitilisi ruute on alati paarisarv, siis selline mittekriitiline ruut leidub.

Kirjeldatud strateegia korral tekivad mängulauale kriitilised ruudud hiljemalt vaadeldava mängija teisel käigul ning tema vastane ei saa enne seda võita. Edasi ei saa ta kirjeldatud strateegiat järgides kaotada ning mäng ei saa ka jääda viiki, sest kuni seis püsib stabiilsena, on kriitilised ruudud laual alati olemas. Järelikult võidab vaadeldav mängija mingil käigul.