

# Treeningvõistlus IMO-2006 võistkonnale

Tartus, 12. juunil 2006

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik reaalarvude paarid  $(a, b)$ , mille korral võrrandisüsteemil

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a, \quad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b$$

on vähemalt üks reaalarvuline lahend  $(x, y)$ .

2. Kolmnurga  $ABC$  küljel  $AC$  valitakse punkt  $B_1$  ning küljel  $AB$  valitakse punkt  $C_1$ . Lõigud  $BB_1$  ja  $CC_1$  lõikuvad punktis  $D$ . Tõesta, et  $AB_1DC_1$  on puutujanelinurk (s.t. leidub ringjoon, mis puutub selle kõiki nelja külge) siis ja ainult siis, kui kolmnurkade  $ABD$  ja  $ACD$  siseringjooned puutuvad teineteist.
3. Kaks mängijat mängivad SOS-mängu, kirjutades  $1 \times n$  ruudust ( $n > 100$ ) koosneva mängulaua ruutudesse kordamööda tähti. Käigul olev mängija valib suvalise ühe veel tühja ruudu ning kirjutab sinna tähe S või O. Võidab mängija, kelle käigu järel moodustub esmakordselt mingis kolmes kõrvutises ruudus olevatest tähtedest sõna SOS. Kui kõik ruudud saavad täidetud ilma, et sõna SOS oleks tekkinud, jääb mäng viiki.

Tõesta, et iga  $n$  korral on ühel mängijatest olemas võitev strateegia, ning leia kõik  $n$  väärtused, mille korral võitev strateegia on alustajal.