Treeningvõistlus IMO-2005 võistkonnale

Käärikul, 5. juulil 2005

Vastused ja lahendusvihjed

1. Leia kõik sellised reaalarvuliste kordajatega polünoomid $p(x)$, mis rahuldavad tingimust

$$p\big(2p(x)\big) = 2p\big(p(x)\big) + 2\big(p(x)\big)^2$$

iga reaalarvu x korral.

Vastus: $p(x) \equiv 0$, $p(x) \equiv -\dfrac{1}{2}$ ja $p(x) = x^2 + bx$, kus b on suvaline reaalarv.

Vihje. Uurides polünoomide $p\big(2p(x)\big)$, $2p\big(p(x)\big)$ ja $2\big(p(x)\big)^2$ pealiikmeid leiame, et $p(x)$ aste n saab olla ainult 0 või 2. Kui $n = 0$, siis $p(x) \equiv a$ ning saame võrrandi $a + 2a^2 = 0$, kust $a = 0$ või $a = -\dfrac{1}{2}$. Kui $n = 2$, siis $p(x) = ax^2 + bx + c$; pealiikmete võrdlemine annab $a = 1$ ja vabaliikmete võrdlemine $c = 0$.

2. Kolmnurga ABC küljel BC võetakse punktid M ja N nii, et punkt M paikneb punktide B ja N vahel ning $|BM| = |CN|$. Lõikudel AN ja AM võetakse vastavalt punktid P ja Q nii, et $\angle PMC = \angle MAB$ ja $\angle QNB = \angle NAC$. Tõesta, et $\angle QBC = \angle PCB$.

Vihje. Olgu X kolmnurga BQN ümberringjoone teine lõikepunkt kiirega AM ning Y kolmnurga CPM ümberringjoone teine lõikepunkt kiirega AN. Siis $BQNX$ ja $CPMY$ on kõõlnelinurgad ning ülesande väite tõestuseks piisab näidata, et $MNYX$ on kõõlnelinurk, ehk samaväärselt, et $|AM| \cdot |AX| = |AN| \cdot |AY|$.

Kolmnurkade ABM ja ACN pindalade võrdsusest saame, et

$$|AM| \cdot |AB| \cdot \sin \angle MAB = |AN| \cdot |AC| \cdot \sin \angle NAC\ . \qquad (1)$$

Kolmnurkade ABX ja YCA sarnasusest saame, et

$$\frac{|AY|}{|AX|} = \frac{|CY|}{|AB|} \; . \tag{2}$$

Siinusteoreemist kolmnurgas ACY saame, et

$$\frac{\sin \angle MAB}{|AC|} = \frac{\sin \angle NAC}{|CY|} \; . \tag{3}$$

Võrduste (1), (2) ja (3) kombineerimisel saame ülesandes nõutud väite.

3. Nimetame n*-permutatsiooniks* järjendit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on arvud $1, 2, \ldots, n$ mingis järjekorras võetuna. Nimetame n-permutatsiooni $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ruutusisaldavaks*, kui vähemalt üks arvudest a_1, a_1+a_2, $\ldots$, $a_1+a_2+\ldots+a_n$ on mingi täisarvu ruut.

Leia kolm vähimat sellist positiivset täisarvu n, mille korral kõik n-permutatsioonid on ruutusisaldavad.

Vastus: 1, 8 ja 49.

Vihje. Paneme tähele, et kui $1+2+\ldots+n$ on mingi täisarvu ruut, siis kõik n-permutatsioonid on ruutusisaldavad, ning näitame, et kehtib ka selle väite pöördväide. Tõepoolest, olgu kõik n-permutatsioonid ruutusisaldavad ning vaatleme permutatsiooni $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kus $a_i = i$. Olgu $k \leqslant n$ suurim selline arv, et $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1 + \ldots + k$ on mingi täisarvu ruut — paneme seejuures tähele, et kui $k > 1$, siis s_{k-1} ei ole täisarvu ruut, sest kui $s_k = \dfrac{k(k+1)}{2} = m^2$ ja $k > 1$, siis $m > k$ ning $s_{k-1} = s_k - k > m^2 - m > (m-1)^2$. Kui nüüd $k < n$, siis vahetades omavahel elemendid $a_k = k$ ja $a_{k+1} = k+1$ (sellega muutub summadest s_i ainsana summa s_k) saavutame olukorra, kus ükski arvudest $s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n$ ei ole täisarvu ruut, kusjuures endiselt $a_i = i$ iga $i = 1, 2, \ldots, k-1$ korral. Sarnast konstruktsiooni jätkates (saame seda teha, kuna "järgmine" k' on ülimalt $k-2$ ning seega $a_i = i$ iga $i = 1, 2, \ldots, k'+1$ korral) jõuame n-permutatsioonini, mille korral ükski summadest s_k ei ole täisarvu ruut.

Niisiis vastab arv n ülesande tingimustele parajasti siis, kui

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \tag{4}$$

mingi täisarvu m korral. Kolm esimest sellist arvu võime nüüd leida lihtsa juhtude läbivaatuse teel. Tõestamaks selliste arvude hulga lõpmatust paneme tähele, et võrdus (4) on samaväärne võrdusega $(2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1$, kus asendades $x = 2n + 1$ ja $y = 2m$ saame Pelli võrrandi $x^2 - 2y^2 = 1$. Selle võrrandi primitiivne lahend on $(x_0, y_0) = (3, 2)$ ning kõik lahendid (x, y) saame võrdusest

$$x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k ,$$

kus $k = 1, 2, \ldots$. Seega on nõutud omadusega parajasti arvud

$$n = \frac{(3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k - 2}{4} ,$$

kus $k = 1, 2, \ldots$.

Teine võimalus b) osa jaoks (Emilialt). Esimene sobiv väärtus on $n = 1$. Selleks, et $n > 1$ korral kõik n-permutatsioonid oleksid ruutusisaldavad, peab ka permutatsioon $(2, 1, 3, 4, \ldots, n)$ olema ruutusisaldav, st. summa $2 + 1 + 3 + \ldots + k$ peab mingi k korral olema täisruut. Vähim selline k väärtus on $k = 8$, mis tähendab, et teine sobiv n väärtus on $n = 8$ (siis $1+2+3+\ldots+8 = 6^2$, mistõttu kõik 8-permutatsioonid on ruutusisaldavad). Selleks, et $n > 8$ korral kõik n-permutatsioonid oleksid ruutusisaldavad, peab ka permutatsioon $(9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots, n)$ olema ruutusisaldav, st. summa $9 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 10 + \ldots + k$ peab mingi k korral olema täisruut. Vähim selline k väärtus on $k = 49$, mis tähendab, et järgmine sobiv n väärtus on $n = 49$.