

Treeningvõistlus IMO-2005 võistkonnale

Käärikul, 5. juulil 2005

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvuliste kordajatega polünoomid $p(x)$, mis rahuldavad tingimust

$$p(2p(x)) = 2p(p(x)) + 2(p(x))^2$$

iga reaalarvu x korral.

2. Kolmnurga ABC küljel BC võetakse punktid M ja N nii, et punkt M paikneb punktide B ja N vahel ning $|BM| = |CN|$. Lõikudel AN ja AM võetakse vastavalt punktid P ja Q nii, et $\angle PMC = \angle MAB$ ja $\angle QNB = \angle NAC$. Tõesta, et $\angle QBC = \angle PCB$.
3. Nimetame n -permutatsiooniks järjendit (a_1, a_2, \dots, a_n) , kus a_1, a_2, \dots, a_n on arvud $1, 2, \dots, n$ mingis järjekorras võetuna. Nimetame n -permutatsiooni (a_1, a_2, \dots, a_n) ruutuisaldavaks, kui vähemalt üks arvudest $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ on mingi täisarvu ruut.
 - a) Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid positiivseid täisarve n , mille korral kõik n -permutatsioonid on ruutuisaldavad.
 - b) Leia kolm vähimat sellist positiivset täisarvu n , mille korral kõik n -permutatsioonid on ruutuisaldavad.