

Treeningvõistlus IMO-2004 võistkonnale

Käärikul, 30. juunil 2004

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kaks mereröövliit jagavad saaki, mis koosneb kahest kotist müntidest ja ühest teemandist. Nad lepivad kokku järgmise protseduuri otsustamaks, kumb neist saab teemandi. Kordamööda valib kumbki neist ühe mündikoti, võtab sealt välja suvalise paarisarvu münste ning paneb pooled neist müntidest teise kotti, ülejäänud aga jätab endale. Kui üks mereröövlistest enam oma käiku teha ei saa (sest kummaski kotis on järel ülimalt üks münt), saab teine teemandi endale. Leia kõik sellised müntide esialgsed arvud kottides, mille korral mereröövlil, kes esimesena münste võtab, on võimalus teemant kindlasti endale saada.
2. Nimetame positiivset täisarvu n *täiuslikuks*, kui ta on võrdne kõigi oma positiivsete täisarvuliste jagajate summaga, välja arvatud n ise. Tõesta, et:
 - a) iga 6-st suurem täiuslik arv, mis jagub 3-ga, jagub ka 9-ga;
 - b) iga 28-st suurem täiuslik arv, mis jagub 7-ga, jagub ka 49-ga.
3. Olgu teravnurkse mitte-võrdhaarse kolmnurga ABC tippudest A ja C tõmmatud kõrgused vastavalt AA_1 ja CC_1 ning lõigaku nende lõikumisel tekkiva teravnurga poolitajasirge kolmnurga külgi AB ja BC vastavalt punktides P ja Q . Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning M külje AC keskpunkt. Tõesta, et punktides P ja Q vastavalt külgedele AB ja BC tõmmatud ristsirged ja nurga ABC poolitaja lõikuvad ühes punktis, mis asub lõigul HM .