

Treeningvõistlus IMO-2003 võistkonnale

Käärikul, 3. juulil 2003

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ristkülikukujulise $m \times n$ tabeli igasse lahtrisse on kirjutatud üks reaalarv, kusjuures kõik rea- ja veerusummad on täisarvud. Tõesta, et iga arv x selles tabelis on võimalik asendada arvuga $\lfloor x \rfloor$ või $\lceil x \rceil$ nii, et kõik rea- ja veerusummad jäävad samaks. (Siin $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ole suurem arvust x , ning $\lceil x \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis ei ole väiksem arvust x .)

2. Nimetame funktsiooni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eriti kumeraks, kui

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|$$

mistahes reaalarvude x ja y korral. Tõesta, et eriti kumeraid funktsioone ei ole olemas.

3. Kolmnurga ABC külgedel AC ja AB võetakse vastavalt punktid M ja N , nii et BM ja CN on kolmnurga nurgapoolitajad. Lõigaku kiir MN kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D . Tõesta võrdus

$$\frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|CD|}$$