

# Treeningvõistlus IMO-2002 võistkonnale

Käärikul, 16. juulil 2002

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu  $T$  kõigi mittenegatiivsete täisarvude järjestatud kolmikute  $(p, q, r)$  hulk. Leia kõik sellised funktsioonid  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ , et

$$f(p, q, r) = \begin{cases} 0, & \text{kui } pqr = 0; \\ 1 + \frac{1}{6}(f(p+1, q-1, r) + f(p-1, q+1, r) + \\ \quad + f(p+1, q, r-1) + f(p-1, q, r+1) + \\ \quad + f(p, q+1, r-1) + f(p, q-1, r+1)), & \text{kui } pqr \neq 0. \end{cases}$$

2. a) Leia kõik sellised lõplikud järjendid  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , et iga  $0 \leq j \leq n$  korral arv  $j$  esineb vaadeldavas järjendis täpselt  $x_j$  korda.  
b) Kas leidub lõpmatu jada  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ , milles iga täisarv  $j \geq 0$  esineb täpselt  $x_j$  korda?
3. Konstrueerime teravnurkse kolmnurga  $ABC$  külgedele kolmnurgast  $ABC$  väljapoole võrdhaarsed kolmnurgad  $DAC$ ,  $EAB$  ja  $FBC$ , kus  $|DA| = |DC|$ ,  $|EA| = |EB|$  ja  $|FB| = |FC|$  ning

$$\angle ADC = 2\angle BAC, \quad \angle BEA = 2\angle ABC, \quad \angle CFB = 2\angle ACB.$$

Lõikugu sirged  $DB$  ja  $EF$  punktis  $D'$ , sirged  $EC$  ja  $DF$  punktis  $E'$  ning sirged  $FA$  ja  $DE$  punktis  $F'$ . Leia avaldise

$$\frac{|DB|}{|DD'|} + \frac{|EC|}{|EE'|} + \frac{|FA|}{|FF'|}$$

väärtus.