Treeningvõistlus “Balti tee ’99” võistkonnale

Tartus, 26. oktoobril 1999

1. Kolmnurkse tabeli esimesse ritta kirjutatakse arvud 1, n, n^2, $\ldots$, n^k (kus $n \geqslant 3$ ja $k \geqslant 2$), teise ritta nende arvude vahed, kolmandasse ritta teise rea arvude vahed jne. (kõrval on näiteks toodud saadav tabel $n = 3$ ja $k = 4$ korral). Tõesta, et sellises tabelis on kõik arvud erinevad.

1	3	9	27	81
2	6	18	54	
4	12	36		
8	24			
16				

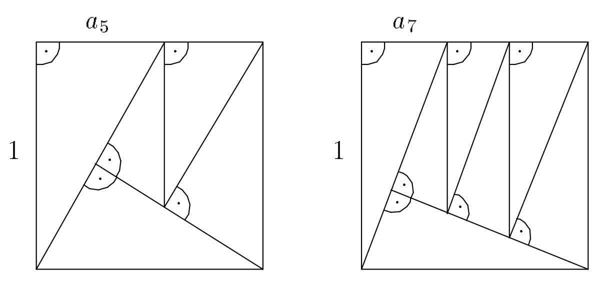
2. Arvu 3 saab esitada kahe või enama järjestikuse täisarvu summana kolmel erineval viisil: $3 = 1 + 2$, $3 = 0 + 1 + 2$ ja $3 = (-1) + (-2) + 0 + 1 + 2 + 3$. Tõesta, et täisarvu $N \geqslant 2$ saab esitada niisuguse summana rohkem kui ühel viisil siis ja ainult siis, kui $N \neq 2^k$.

3. Mitu algarvu võib maksimaalselt olla hulgas $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+35\}$, kus n on positiivne täisarv?

4. Õpetaja kirjutas tahvlile miljonist väiksema positiivse täisarvu. Esimene õpilane ütles, et kirjutatud arv jagub 2-ga, teine õpilane, et see arv jagub 3-ga, kolmas, et arv jagub 4-ga, jne. kuni lõpuks kuueteistkümnes õpilane ütles, et see arv jagub 17-ga. Millise arvu kirjutas õpetaja tahvlile, kui on teada, et täpselt kaks õpilast kuueteistkümnest eksisid ning need kaks ütlesid oma väited järjest?

5. Positiivsete täisarvude kolmikut (x, y, z) nimetame *Pythagorase kolmikuks*, kui $x^2 + y^2 = z^2$, ning kaht Pythagorase kolmikut (x, y, z) ja (x', y', z') nimetame *sarnasteks*, kui $|x-y| = |x'-y'|$. Tõesta, et mistahes Pythagorase kolmiku jaoks leidub lõpmata palju sellega sarnaseid Pythagorase kolmikuid.

6. Mistahes paaritu täisarvu $n \geqslant 5$ korral saab ühikruudu joonisel näidatud viisil jaotada n sarnaseks täisnurkseks kolmnurgaks. Tõesta, et iga sellise n korral on suurima kolmnurga lühema kaateti pikkus a_n mingi täisarvuliste kordajatega polünoomi $P_n(x)$ nullkohaks, s.t. $P_n(a_n) = 0$.



$n = 5$ $\qquad$ $n = 7$

7. Reaalarvuliste väärtustega funktsioon $f(x)$ rahuldab iga reaalarvu x korral tingimust $f(x-1) + f(x+1) = \sqrt{3} \cdot f(x)$.
   a) Tõesta, et $f(x+12) = f(x)$ iga reaalarvu x korral.
   b) Too näide niisugusest mittekonstantsest funktsioonist.

8. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c), mis on mingi niisuguse kolmnurga küljepikkusteks, mille pindala ja ümbermõõt on arvuliselt võrdsed.

9. Reaalarvude jadast a_1, a_2, a_3, ... saadakse kaks uut jada b_1, b_2, b_3, ... ja c_1, c_2, c_3, ..., võttes $b_i = a_{i+1} - a_i$ ja $c_i = b_{i+1} - b_i$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral. On teada, et jada c_1, c_2, c_3, ... on konstantne, s.t. selle kõik liikmed on võrdsed mingi arvuga c. Tõesta, et leidub niisugune ruutpolünoom $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, et $a_i = P(i)$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral.

10. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

11. 20 last koguvad münte, kusjuures mistahes kahe lapse A ja B korral leidub nii riik, mille münte A kogus on ja B kogus ei ole, kui ka riik, mille münte B kogus on ja A kogus ei ole. Mitme riigi münte peab kõigi 20 lapse mündikogudes kokku vähemalt olema?

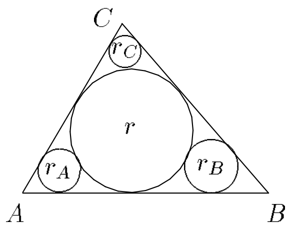
12. Olgu a_1, a_2, ..., a_{1999} arvude 1, 2, ..., 1999 mingi ümberjärjestus. Kas on võimalik, et arvud $|a_1 - 1|$, $|a_2 - 2|$, ..., $|a_{1999} - 1999|$ on kõik erinevad?

13. Tõesta, et 2^n-elemendilisest hulgast A saab välja valida sellised n alamhulka B_1, B_2, ..., B_n, et igaüks neist on 2^{n-1}-elemendiline ning mistahes $i \neq j$ korral on hulkade B_i ja B_j ühisosa 2^{n-2}-elemendiline.

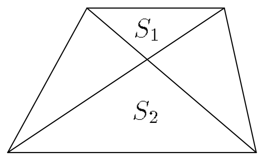
14. Lõpmatu ruudustiku igas ruudus on mingi täisarv, kusjuures iga arv esineb ülimalt ühes ruudus. Tõesta, et mistahes arvu N jaoks leiduvad sellised kaks ühise küljega ruutu, milles olevad arvud erinevad teineteisest rohkem kui N võrra.

15. Nimetame kumerat $2n$-nurka *rombiliseks*, kui selle kõik küljed on pikkusega 1 ning iga paar vastaskülgi (s.t. 1. ja $n+1$. külg, 2. ja $n+2$. külg, ..., n. ja $2n$. külg) on omavahel paralleelsed. Tõesta, et mistahes rombilist $2n$-nurka on võimalik jaotada $\dfrac{n(n-1)}{2}$ rombiks küljepikkusega 1.

16. Kolmnurgas ABC siseringjoone raadiusega r joonestatakse ringjooned, millest igaüks puutub kaht kolmnurga külge ja siseringjoont, nagu joonisel näidatud. Olgu nende ringjoonte raadiused r_A, r_B ja r_C. Tõesta, et kehtib võrratus $r_A+r_B+r_C \geqslant r$. Milliste kolmnurkade korral kehtib siin võrdus?



17. Trapetsi diagonaalid jaotavad selle neljaks kolmnurgaks. Avalda trapetsi pindala S selle aluste juures paiknevate kolmnurkade pindalade S_1 ja S_2 kaudu.



18. On teada, et kolmnurga Δ kõrgused on mingi kolmnurga Δ' küljepikkusteks. Tõesta, et ka kolmnurga Δ' kõrgused on mingi kolmnurga Δ'' küljepikkusteks, kusjuures kolmnurgad Δ ja Δ'' on sarnased ning kolmnurga Δ' pindala on võrdne kolmnurkade Δ ja Δ'' pindalade geomeetrilise keskmisega.

19. Mitu 120° suurust sisenurka võib maksimaalselt olla kõõlseitsenurgal, mille kõik küljed on erinevate pikkustega?

20. Koordinaattasandil on antud kumer hulknurk. Olgu $x_{\min}$ ja $x_{\max}$ vastavalt selle hulknurga tippude minimaalne ja maksimaalne x-koordinaat ning $y_{\min}$ ja $y_{\max}$ selle tippude minimaalne ja maksimaalne y-koordinaat. Tõesta, et punkt koordinaatidega $\left(\frac{x_{\min}+x_{\max}}{2}, \frac{y_{\min}+y_{\max}}{2}\right)$ paikneb hulknurga sisepiirkonnas või rajal.