Treeningvõistlus "Balti tee '99" võistkonnale

Tartus, 26. oktoobril 1999

Ülesanded, vastused ja lahendusideed

Ülesannete 5 ja 20 autor on Härmel Nestra, ülesanded 9, 13, 14 ja 19 pakuti osalevate riikide poolt "Balti Tee '98" ning ülesanne 10 IMO'67 žüriile. Kõik ülejäänud ülesanded (1–4, 6–8, 11–12 ja 15–18) pärinevad USA matemaatiliste annete otsingu programmi (*US Mathematical Talent Search*) 1991/92 ja 1992/93 aastakäikudest.

1. Kolmnurkse tabeli esimesse ritta kirjutatakse arvud $1, n, n^2, \ldots, n^k$ (kus $n \geqslant 3$ ja $k \geqslant 2$), teise ritta nende arvude vahed, kolmandasse ritta teise rea arvude vahed jne. (kõrval on näiteks toodud saadav tabel $n = 3$ ja $k = 4$ korral). Tõesta, et sellises tabelis on kõik arvud erinevad.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 3 & & 9 & & 27 & & 81 \\ & 2 & & 6 & & 18 & & 54 & \\ & & 4 & & 12 & & 36 & & \\ & & & 8 & & 24 & & & \\ & & & & 16 & & & & \end{array}$$

   Lahenduse skeem. Tõestame induktsiooniga rea numbri järgi, et tabeli p. reas q. positsioonis ($p, q = 1, 2, \ldots$) paikneb arv $n^{q-1} \cdot (n-1)^{p-1}$, ning kasutame asjaolu, et arvud n ja $n-1$ on ühistegurita.

2. Arvu 3 saab esitada kahe või enama järjestikuse täisarvu summana kolmel erineval viisil: $3 = 1 + 2$, $3 = 0 + 1 + 2$ ja $3 = (-1) + (-2) + 0 + 1 + 2 + 3$. Tõesta, et täisarvu $N \geqslant 2$ saab esitada niisuguse summana rohkem kui ühel viisil siis ja ainult siis, kui $N \neq 2^k$.

   Lahenduse skeem. Olgu vaadeldavas summas n liidetavat $a_1, a_2, \ldots, a_n$, siis $2 \cdot N = n \cdot (a_1 + a_n) = n \cdot (2a_1 + n - 1)$. Siit on näha, et arvu N igale paaritule tegurile vastab kaks erinevat n väärtust; seejuures tegurile 1 vastab ka väärtus $n = 1$, mida me ei arvesta.

3. Mitu algarvu võib maksimaalselt olla hulgas $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+35\}$, kus n on positiivne täisarv?

   Vastus: 12.

   Lahenduse skeem. Arvude 2 kuni 37 hulgas on 12 algarvu. Mistahes 36 järjestikuse täisarvu hulgas on 18 paarisarvu, 12 kolmega jaguvat arvu ja 6 kuuega jaguvat arvu, mistõttu $n > 3$ korral ei saa algarve olla rohkem kui $36 - (18 + 12 - 6) = 12$.

4. Õpetaja kirjutas tahvlile miljonist väiksema positiivse täisarvu. Esimene õpilane ütles, et kirjutatud arv jagub 2-ga, teine õpilane, et see arv jagub 3-ga, kolmas, et arv jagub 4-ga, jne. kuni lõpuks kuueteistkümnes õpilane ütles, et see arv jagub 17-ga. Millise arvu kirjutas õpetaja tahvlile, kui on teada, et täpselt kaks õpilast kuueteistkümnest eksisid ning need kaks ütlesid oma väited järjest?

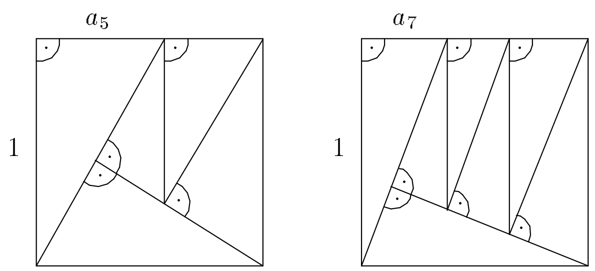
   Vastus: 360360.

   Lahenduse skeem. Kui arv ei jagu k-ga, siis ei jagu see ka ühegi k kordsega. Seda ja eksijate järjestikkust silmas pidades leiame, et eksida võisid ainult kaks viimast õpilast.

5. Positiivsete täisarvude kolmikut $(x,\, y,\, z)$ nimetame *Pythagorase kolmikuks*, kui $x^2 + y^2 = z^2$, ning kaht Pythagorase kolmikut $(x,\, y,\, z)$ ja $(x',\, y',\, z')$ nimetame *sarnasteks*, kui $|x-y| = |x'-y'|$. Tõesta, et mistahes Pythagorase kolmiku jaoks leidub lõpmata palju sellega sarnaseid Pythagorase kolmikuid.

   Lahenduse skeem. Olgu $x^2+y^2 = z^2$. Võttes $x' = 2x+y+2z$, $y' = x+2y+2z$ ja $z' = 2x+2y+3z$, saame ${x'}^2 + {y'}^2 = {z'}^2$, $x'-y' = x-y$ ning $x' > x$, $y' > y$ ja $z' > z$.

6. Mistahes paaritu täisarvu $n \geqslant 5$ korral saab ühikruudu joonisel näidatud viisil jaotada n sarnaseks täisnurkseks kolmnurgaks. Tõesta, et iga sellise n korral on suurima kolmnurga lühema kaateti pikkus a_n mingi täisarvuliste kordajatega polünoomi $P_n(x)$ nullkohaks, s.t. $P_n(a_n) = 0$.



$n = 5$ $\qquad$ $n = 7$

Lahenduse skeem. Olgu $n = 2k+1$, siis kaatetit pikkusega a_n sisaldaval ruudu küljel on veel kaatetid pikkustega $\dfrac{a_n}{(1+a_n^2)}$, $\dfrac{a_n}{(1+a_n^2)^2}$, …, $\dfrac{a_n}{(1+a_n^2)^{k-1}}$. Saame võrduse

$$1 = a_n + \frac{a_n}{(1+a_n^2)} + \frac{a_n}{(1+a_n^2)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+a_n^2)^{k-1}}\,,$$

mida nimetajate vähima ühiskordsega $(1+a_n^2)^{k-1}$ läbi korrutades näemegi, et a_n on teatava täisarvuliste kordajatega polünoomi $P_n(x)$ nullkohaks.

Märkus. Rakendades geomeetrilise rea osasumma valemit võime leida, et $P_n(x) = (x^2+1)^n - x(x+1)^{n-1} - 1$.

7. Reaalarvuliste väärtustega funktsioon $f(x)$ rahuldab iga reaalarvu x korral tingimust $f(x-1) + f(x+1) = \sqrt{3} \cdot f(x)$.
   a) Tõesta, et $f(x+12) = f(x)$ iga reaalarvu x korral.
   b) Too näide niisugusest mittekonstantsest funktsioonist.

Lahenduse skeem. a) Asendades x asemele $x+1$ ja $x-1$ ja liites saadud võrdused leiame, et $f(x+2)+f(x-2) = f(x)$. Asendades siin omakorda x asemele $x+2$ ja $x+4$ saame $f(x+6) = -f(x)$, kust $f(x+12) = f(x)$.
b) Sobib $f(x) = \cos\dfrac{\pi \cdot x}{6}$, aga ka näiteks mittepidev funktsioon, mille väärtused täisarvulistel kohtadel leiame suvalistest etteantud algtingimustest $f(0) = a$ ja $f(1) = b$ ning mis mitte-täisarvulistel kohtadel on samaselt võrdne nulliga.

8. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c), mis on mingi niisuguse kolmnurga küljepikkusteks, mille pindala ja ümbermõõt on arvuliselt võrdsed.

Vastus: (10, 6, 8), (13, 5, 12), (20, 7, 15), (29, 6, 25) ja (17, 9, 10) ning neist arvude järjekorra muutmisel saadavad kolmikud.

Lahenduse skeem. Ülesande tingimusi arvestades saame Heroni valemist $4p = (p-a)(p-b)(p-c)$, kus $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ on täisarv, sest muidu ei saaks pindala olla täisarvuline. Asendades $x = p-a$, $y = p-b$ ja $z = p-c$, saame $4(x+y+z) = xyz$. Siin x, y, z on erinevad positiivsed täisarvud (kui nt. $x = y$, saaksime $(xz-4)^2 = 4 \cdot (z^2+4)$, mis pole võimalik, sest z^2+4 ei ole täisruut), mistõttu võime eeldada, et $x < y < z$. Oletus $x \geqslant 3$ annab $3yz < 12z$ ehk $y < 4$, mis pole võimalik. Kui $x = 1$ või $x = 2$, saame vastavalt $(y-4)(z-4) = 20$ või $(y-2)(z-2) = 8$: neist võrdustest leiame lahendid.

9. Reaalarvude jadast $a_1, a_2, a_3, \ldots$ saadakse kaks uut jada $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ja $c_1, c_2, c_3, \ldots$, võttes $b_i = a_{i+1} - a_i$ ja $c_i = b_{i+1} - b_i$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral. On teada, et jada $c_1, c_2, c_3, \ldots$ on konstantne, s.t. selle kõik liikmed on võrdsed mingi arvuga c. Tõesta, et leidub niisugune ruutpolünoom $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, et $a_i = P(i)$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral.

Lahenduse skeem. Olgu $c_k = c$ iga $k = 1, 2, \ldots$ korral, siis vahetult ülesande tingimustest saame $b_k = b_1 + (k-1)c$ ning $a_k = a_1 + (k-1)b_1 + \dfrac{(k-1)(k-2)}{2}\,c$.

10. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2+x-1=y \\ y^2+y-1=z \\ z^2+z-1=x \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Vastus: $x=y=z=1$ ja $x=y=z=-1$.
Lahenduse skeem. Võrduste liitmine annab $x^2+y^2+z^2=3$. Viies miinusmärgiga liidetavad teisele poole ja korrutades saadud võrdused, saame $xyz(x+1)(y+1)(z+1)=(x+1)(y+1)(z+1)$. Kui kasvõi üks arvudest x, y, z on -1, saame $x=y=z=-1$; vastasel korral $xyz=1$ ning arvude x^2, y^2 ja z^2 aritmeetiline ja geomeetriline keskmine on võrdsed, mistõttu $x^2=y^2=z^2=1$ ja $x=y=z=1$.

Märkus. Ülaltoodud lahenduse esitas "Balti Tee '99" Eesti võistkonna liige Leopold Parts. Ülesande autori väljapakutud lahenduses leitakse lahendid kujul $x=y=z$ võrrandist $t^2+t-1=t$ ning tõestamaks muude lahendite puudumist uuritakse funktsiooni $f(t)=t^2-t+1$ käitumist piirkondades $-\frac{5}{4}\leqslant t<-1$, $-1<t<1$ ja $t>1$.

11. 20 last koguvad münte, kusjuures mistahes kahe lapse A ja B korral leidub nii riik, mille münte A kogus on ja B kogus ei ole, kui ka riik, mille münte B kogus on ja A kogus ei ole. Mitme riigi münte peab kõigi 20 lapse mündikogudes kokku vähemalt olema?

Vastus: 6.
Lahenduse skeem. Paneme tähele, et $C_6^3=20$ (s.t. kuuest riigist saab välja valida 20 erinevat kolmikut). Teisalt, tähistagu $P(n)$ laste maksimaalset arvu n riigi korral, kui ülesande tingimused on täidetud: paneme tähele, et $P(1)=1$ ning $P(n+1)\leqslant 2P(n)$ mistahes $n\geqslant 1$ korral. Seega $P(5)\leqslant 16<20$ ning 5 riigist ei piisa.

12. Olgu a_1, a_2, ..., a_{1999} arvude $1, 2, \ldots, 1999$ mingi ümberjärjestus. Kas on võimalik, et arvud $|a_1-1|$, $|a_2-2|$, ..., $|a_{1999}-1999|$ on kõik erinevad?

Vastus: ei ole.
Lahenduse skeem. Arvud $|m|$ ja m on alati sama paarsusega. Kui arvud $|a_k-k|$ oleksid kõik erinevad, siis peaksid nad olema $0, 1, \ldots, 1998$ mingis järjekorras võetuna ning nende summa oleks paaritu; arvude a_k-k summa on aga 0.

13. Tõesta, et 2^n-elemendilisest hulgast A saab välja valida sellised n alamhulka B_1, B_2, ..., B_n, et igaüks neist on 2^{n-1}-elemendiline ning mistahes $i\neq j$ korral on hulkade B_i ja B_j ühisosa 2^{n-2}-elemendiline.

Lahenduse skeem. Olgu hulga A elementideks järjendid $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kus iga a_k väärtus on 0 või 1, ning $B_i = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i = 1 \}$. Siis $B_i \cap B_j = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i = a_j = 1 \}$.

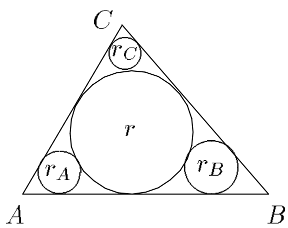
14. Lõpmatu ruudustiku igas ruudus on mingi täisarv, kusjuures iga arv esineb ülimalt ühes ruudus. Tõesta, et mistahes arvu N jaoks leiduvad sellised kaks ühise küljega ruutu, milles olevad arvud erinevad teineteisest rohkem kui N võrra.

    Lahenduse skeem. Et mistahes $n \times n$ ruudust koosnev ruudustiku osa sisaldab n^2 erinevat arvu, siis on suurima ja vähima arvu vahe selles vähemalt n^2-1. Vähimat arvu sisaldavast ruudust suurimat arvu sisaldava ruuduni jõuame aga ülimalt $2n-2$ sammuga. Niisiis leiduvad naaberruudud, milles olevad arvud erinevad teineteisest vähemalt $\dfrac{n^2-1}{2n-2}$ võrra — see suhe aga omandab n kasvades kuitahes suuri väärtusi.

15. Nimetame kumerat $2n$-nurka *rombiliseks*, kui selle kõik küljed on pikkusega 1 ning iga paar vastaskülgi (s.t. 1. ja $n{+}1$. külg, 2. ja $n{+}2$. külg, ..., n. ja $2n$. külg) on omavahel paralleelsed. Tõesta, et mistahes rombilist $2n$-nurka on võimalik jaotada $\dfrac{n(n-1)}{2}$ rombiks küljepikkusega 1.

    Lahenduse skeem. Teeme induktsiooni n järgi. Juhul $n = 2$ väide kehtib, sest hulknurk on romb ja $\dfrac{n(n-1)}{2} = 1$. Induktsiooni sammu jaoks konstrueerime $2n$-nurga $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ sisepiirkonnas punktid $B_3, B_4, \ldots, B_n$, nii et $\overrightarrow{A_3B_3} = \ldots = \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$. Hulknurk $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ jaotub rombiliseks $2(n{-}1)$-nurgaks $A_1B_3B_4 \ldots B_nA_{n+2}A_{n+3} \ldots A_{2n}$ ja $n-1$ rombiks, ning $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

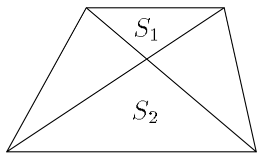
16. Kolmnurgas ABC siseringjoone raadiusega r joonestatakse ringjooned, millest igaüks puutub kaht kolmnurga külge ja siseringjoont, nagu joonisel näidatud. Olgu nende ringjoonte raadiused r_A, r_B ja r_C. Tõesta, et kehtib võrratus $r_A{+}r_B{+}r_C \geqslant r$. Milliste kolmnurkade korral kehtib siin võrdus?



    Vastus: võrdus kehtib parajasti võrdkülgse kolmnurga korral.

Lahenduse skeem. Kolmnurga ABC külgedega paralleelsed siseringjoone puutujad eraldavad selle tippude juures kolmnurgaga ABC sarnased väikesed kolmnurgad, kusjuures nende sarnasustegurite summa on võrdne ühega (s.t. nende kolme kolmnurga vastavate elementide pikkuste summa on võrdne kolmnurga ABC vastava elemendi pikkusega). Olgu nende kolme kolmnurga siseringjoonte raadiused vastavalt r'_A, r'_B ja r'_C, siis muuhulgas $r'_A + r'_B + r'_C = r$. Jääb üle tähele panna, et $r_A \geqslant r'_A$, $r_B \geqslant r'_B$ ja $r_C \geqslant r'_C$, kusjuures võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui vastava tipu lähisküljed on võrdse pikkusega.

17. Trapetsi diagonaalid jaotavad selle neljaks kolmnurgaks. Avalda trapetsi pindala S selle aluste juures paiknevate kolmnurkade pindalade S_1 ja S_2 kaudu.



Vastus: $S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$.

Lahenduse skeem. Olgu S_3 ükskõik kumma haara juures paikneva kolmnurga pindala, siis $S_1 : S_3 = S_3 : S_2 = h_1 : h_2$, kus h_1 ja h_2 on trapetsi diagonaalide lõikepunkti kaugused alustest.

18. On teada, et kolmnurga Δ kõrgused on mingi kolmnurga Δ' küljepikkusteks. Tõesta, et ka kolmnurga Δ' kõrgused on mingi kolmnurga Δ'' küljepikkusteks, kusjuures kolmnurgad Δ ja Δ'' on sarnased ning kolmnurga Δ' pindala on võrdne kolmnurkade Δ ja Δ'' pindalade geomeetrilise keskmisega.

Lahenduse skeem. Olgu kolmnurga Δ külgede pikkused ja pindala a, b, c, S ja kolmnurgal Δ' vastavalt a', b', c', S' ning kolmnurga S' kõrgused olgu a'', b'', c''. Siis $2S = aa' = bb' = cc'$ ja $2S' = a'a'' = b'b'' = c'c''$, kust $\frac{a}{a''} = \frac{b}{b''} = \frac{c}{c''} = \frac{S}{S'}$. Siit näeme, et a'', b'', c'' on kolmnurgaga Δ sarnase kolmnurga Δ'' küljepikkusteks. Olgu kolmnurga Δ'' kõrgused a''', b''', c''' ja pindala S'', siis võrdustest $2S' = a'a'' = b'b'' = c'c''$ ja $2S'' = a''a''' = b''b''' = c''c'''$ saame $\frac{a'}{a'''} = \frac{b'}{b'''} = \frac{c'}{c'''} = \frac{S'}{S''}$ ning järelikult $\frac{S'}{S''} = \frac{S}{S'}$.

19. Mitu $120°$ suurust sisenurka võib maksimaalselt olla kõõlseitsenurgal, mille kõik küljed on erinevate pikkustega?

Vastus: 2.

Lahenduse skeem. Kõõlhulknurga sisenurga suurus on 120° siis ja ainult siis, kui selle lähisküljedele vastavate kesknurkade summa on 120°. Seetõttu on kahe 120° suuruse sisenurgaga ja paarikaupa erinevate küljepikkustega kõõlseitsenurga konstrueerimiseks piisav jaotada 360° nurk seitsmeks erineva suurusega kesknurgaks nii, et kaks paari kõrvutiasetsevaid kesknurki annaksid summas 120°. Kolme niisugust paari ei saa olla, sest siis jääks seitsmenda kesknurga suuruseks 0°. Jääb üle veenduda, et kaks 120° suurust sisenurka ei saa paikneda järjestikku, sest siis oleks seitsenurgal paar võrdse pikkusega külgi.

20. Koordinaattasandil on antud kumer hulknurk. Olgu $x_{\min}$ ja $x_{\max}$ vastavalt selle hulknurga tippude minimaalne ja maksimaalne x-koordinaat ning $y_{\min}$ ja $y_{\max}$ selle tippude minimaalne ja maksimaalne y-koordinaat. Tõesta, et punkt koordinaatidega $\left(\dfrac{x_{\min}+x_{\max}}{2}, \dfrac{y_{\min}+y_{\max}}{2}\right)$ paikneb hulknurga sisepiirkonnas või rajal.

Lahenduse skeem. Olgu A, B, C ja D vastavalt hulknurga maksimaalse y-koordinaadiga, maksimaalse x-koordinaadiga, minimaalse y-koordinaadiga ja minimaalse x-koordinaadiga tipud (kui selliseid tippe on rohkem kui üks, siis valime suvalise neist). Mõned neist tippudest võivad kokku langeda, kuid kindlasti $A \neq C$ ja $B \neq D$. Hulknurga kumeruse tõttu piisab näidata, et vaadeldav punkt O ei asu väljaspool kujundit $ABCD$ (mis võib olla nelinurk, kolmnurk või ka lõik, kui $A = B$ ja $C = D$ või $A = D$ ja $B = C$). Tõepoolest, punktid A, B, C ja D paiknevad sirgetega $y = y_{\max}$, $x = x_{\max}$, $y = y_{\min}$ ja $x = x_{\min}$ piiratud ristküliku järjestikustel külgedel ning O on selle ristküliku diagonaalide lõikepunkt — seega paikneb punkt O kas kujundi $ABCD$ mingil küljel või selle igast küljest samal pool kui kujundi ülejäänud tipud.