Treeningvõistlus "Balti tee '98" võistkonnale

Tartus, 31. oktoobril 1998

1. Leia arvu $100!$ viimane nullist erinev number.

2. Olgu $m > 1$, $n > 1$ täisarvud. Tõesta, et arv $m + n - 1$ ei ole arvu $m^2 + n^2 - 1$ algarvuline jagaja.

3. Kehtigu võrdus $2^p + 3^p = m^n$ mingi algarvu p ja naturaalarvude m ja n korral. Tõesta, et $n = 1$.

4. Olgu $a_1 = 19$, $a_2 = 98$ ning iga $n \geqslant 3$ korral olgu a_n arvu $a_{n-2} + a_{n-1}$ jagamisel 100-ga tekkiv jääk. Leia jääk, mis tekib arvu $a_1^2 + \ldots + a_{1998}^2$ jagamisel 8-ga.

5. Positiivsed täisarvud x, y, z rahuldavad tingimust $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Olgu h arvude x, y, z suurim ühistegur. Tõesta, et $hxyz$ ja $h(y - x)$ on täisarvude ruudud.

6. Leia kõik polünoomid $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, mis rahuldavad tingimusi $n \geqslant 1$, $P(0) = 0$ ning mille korral leiduvad niisugused n erinevat täisarvu $c_1, c_2, \ldots, c_n$, et $P(c_1) = \ldots = P(c_n) = n$.

7. Tõesta, et võrrandil $20\pi(50 - \sqrt{1998}\cos x) = 1142$ leidub lahend vahemikus $(0, \frac{\pi}{4})$.

8. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{cases}$$

positiivsetes reaalarvudes.

9. Jada (a_n) määratakse seostega $a_0 = 1$, $a_{n+1} = c^{a_n}$. Milliste positiivsete reaalarvude c korral on see jada tõkestatud (s.t. leiduvad sellised arvud M ja N, et iga n korral $M \leqslant a_n \leqslant N$)?

10. Tõesta, et iga mittenegatiivse täisarvu n jaoks leidub selline täisarv k, et $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k - 1}$.

11. Firma juhatusse kandideerib 4 inimest: Arpson, Braner, Cesany ja Dean, kelle omavahelised suhted on võrdlemisi pingelised. Arpson teatas, et tema ei nõustu juhatusse kuuluma, kui sinna kuulub Braner või Cesany. Braner teatas, et tema ei soovi juhatusse kuuluda, kui sinna kuulub Dean. Dean ütles, et tema ei saa kuuluda juhatusse, kui sinna ei kuulu ka Cesany. Samal ajal nõuab firma kord, et kui juhatusest puudub Arpson või Braner, siis kuulub sinna kindlasti Dean. Leia kõik neist neljast kandidaadist moodustatud juhatuse koosseisud, mis rahuldavad kõiki mainitud nõudeid.

12. Milliste m, n väärtuste korral saab $m \times n$ -ristküliku katta 1×2 -doominokividega selliselt, et ükski 2×2 -ruut poleks kahe kiviga üleni kaetud?

13. Tahvlil on kirjutis $*3^5*3^4*3^3*3^2*3^1*3^0$. Kaks inimest mängivad mängu, milles käik seisneb ühe tärni asendamises märgiga $+$ või $-$. Käike tehakse kordamööda ja mäng lõpeb, kui kõik tärnid on asendatud. Viimase käigu teinud mängija loetakse võitjaks, kui saadud avaldise väärtus jagub 7-ga. Vastasel korral jääb mäng viiki. Kas alustajal leidub viigistav strateegia?

14. Ümmarguse laua ümber istub lõunasöögi ootel n last $(n > 0)$. Nende jaoks on valmistatud k sorti putru. Tõesta, et on täpselt $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ võimalust anda igale lapsele täpselt üht putru nii, et iga kaks kõrvutiistuvat last saaks erinevat putru.

15. Olgu $n > 0$ ja $k \geqslant 0$ täisarvud. Tõesta, et arv $(kn)!$ jagub arvuga $k!(n!)^k$.

16. Tasandil on antud kujund C , mis koosneb ringjoontest $c_0, c_1, \ldots, c_{1998}$, kusjuures iga $i = 1, \ldots, 1998$ jaoks on täidetud tingimused:

    (1) ringjoone c_i diameeter on võrdne ringjoone c_{i-1} raadiusega;

    (2) ringjoon c_i puutub ringjoont c_{i-1} seestpoolt punktis P_i ;

    (3) punktid P_i ja P_{i+1} on ringjoone c_i diameetri otspunktid.

    Ringjoone c_{1998} külge on jäigalt kinnitatud kosmonaut. Iga ringjoon c_i veereb (ei libise) mööda ringjoone c_{i-1} sisepinda nii, et igal ajahetkel on kõigist ringjoontest moodustuv kujund kongruentne esialgse kujundiga C (ringjoon c_0 on paigal). Mitu pööret teeb kosmonaut liikumatu tasandi suhtes selle ajaga, kui ringjoone c_1 keskpunkt teeb ühe täistiiru?

17. Rööpkülikust $ABCD$ väljaspool võetakse punkt M , mille korral suunatud nurgad $\angle MBC$ ja $\angle CDM$ on võrdsed (s.t. kiired BC ja DM saadakse, pöörates vastavalt kiirt BM ümber punkti B ja kiirt DC ümber punkti D samas suunas sama nurga võrra). Tõesta, et nurgad $\angle CMB$ ja $\angle DMA$ on võrdse suurusega.

18. Olgu D kolmnurga ABC külje AB keskpunkt ja E selline punkt, et $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$ ja $\angle CDA = \angle BAE$. Leia nurga BAC suurus.

19. Tasandil on antud kolmnurk ABC ja punktid P, Q, R, mis rahuldavad tingimusi:

    (1) P asub kolmnurga ABC sees;

    (2) R asub sirgel BC;

    (3) Q ja R asuvad erineval pool sirget AP;

    (4) $BQ \parallel AC$ ja $PQ \parallel AB$;

    (5) $\angle PAC = \angle ACB = \angle PRQ$.

    Tõesta, et kolmnurkade ABC ja PQR ümberringjooned puutuvad teineteist.

20. Tasandil on antud ringjoon k keskpunktiga O ning punkt S, mis paikneb ringjoonest k väljaspool. Läbi punkti S tõmmatakse sirged a ja b, mis lõikavad ringjoont k vastavalt punktides A, A' ja B, B' (mõlemad punkti S poolt vaadates selles järjekorras). Ringjooned, mis määratakse punktidega S, A', B ja S, A, B', lõikuvad teist korda punktis M. Leia punkti M geomeetriline koht (s.t. selle kõik võimalikud asukohad sirgete a ja b suvalise valiku korral).