Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути ’98”

Тарту, 31 октября 1998 г.

1. Найти последнюю отличную от нуля цифру числа $100!$.

2. Пусть $m > 1$, $n > 1$ целые числа. Доказать что число $m + n - 1$ не является простым делителем числа $m^2 + n^2 - 1$.

3. Пусть при каком-то простом p и натуральном n выполняется равенство

   $$2^p + 3^p = m^n$$

   Доказать, что $n = 1$.

4. Пусть $a_1 = 19$ и $a_2 = 98$ и при каждом $n \geq 3$ пусть a_n — остаток при делении $a_{n-2} + a_{n-1}$ на 100. Найти остаток при делении

   $$a_1^2 + \ldots + a_{1998}^2$$

   на 8.

5. Положительные целые числа x, y, z удовлетворяют условию

   $$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

   Пусть h НОД чисел x, y, z. Доказать , что $hxyz$ и $h(y-x)$ — квадраты целых чисел. $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

6. Найти все многочлены $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, которые удовлетворяют условиям $n \geqslant 1$, $P(0) = 0$, и для которых найдутся такие n различных целых числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что $P(c_1) = \ldots = P(c_n) = n$.

7. Доказать, что у уравнения

   $$20\pi(50 - \sqrt{1998}\cos x) = 1142$$

   найдется решение в промежутке $(0, \frac{\pi}{4})$.

8. Решить в положительных вещественных числах систему уравнений

   $$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{cases}$$

9. Последовательность (a_n) определяется формулами

   $$a_0 = 1,\ a_{n+1} = c^{a_n}.$$

При каких положительных вещественных числах c эта последовательность ограничена (т.е. найдутся такие числа M и N, что $M \leqslant a_n \leqslant N$ для любого n) ?

10. Доказать, что для любого неотрицательного целого числа n найдется такое целое число k, что

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

11. На участие в правлении фирмы претендуют 4 человека: Арпсон, Бранер, Цесани и Ден, чьи отношения между собой достаточно напряженные. Арпсон знает, что он не попадет в правление , если туда попадет Бранер или Цесани. Бранер знает, что он не хочет быть в правлении, если там будет Ден. Ден сказал, что он не сможет входить в правление, если там не будет Цесани. В то же время порядок в фирме требует, чтобы, если Арпсон или Бранер не входят в правление, то туда входит Ден. Найти все возможные составы правления, из етих четырех кандидатов, которые удовлетворяют всем условиям.

12. При каких значениях m, n можно прямоугольник $m \times n$ покрыть фишками домино 1×2 так, что никакой квадрат 2×2 не был бы покрыт точно двумя фишками?

13. На доске написано

$$* \, 3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3^1 * 3^0.$$

Два человека играют в игру, которая заключается в замене одной звездочки на символ $+$ или $-$. Ходы делаются по очереди и игра заканчивается, когда все звездочки заменены. Игрок, сделавший последний ход, считается выигравшим, если значение полученного выражения делится на 7. В противном случае игра заканчивается в ничью. Есть ли у начинающего стратегия, ведущая к ничье?

14. Вокруг круглого стола сидят в ожидании завтрака n детей ($n > 0$). Для них приготовили k сортов каши. Доказать, что существует ровно $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ возможностей дать каздому ребенку ровно одну кашу так, чтобы каждыи из его соседей получил бы другую кашу.

15. Пусть $n > 0$ и $k \geq 0$ целые числа. Доказать, что число $(kn)!$ делится на число $k!(n!)^k$.

16. На плоскости дана фигура C, которая состоит из окружностей $c_0, c_1, \ldots, c_{1998}$, где для каждого $i = 1, \ldots, 1998$ выполняются условия:
    (1) диаметр окружности c_i равен радиусу окружности c_{i-1};
    (2) окружость c_i касается окружости c_{i-1} внутренним образом в точке P_i;
    (3) точки P_i и P_{i+1} диаметрально противоположны на окружности c_i.

На стороне окружности c_{1998} закреплен космонавт. Каждая окружность c_i вращается (не скользит) по внутренней стороне окружности c_{i-1} так, что в каждый момент времени все окружности образуют фигуру, подобную первоначальной фигуре C (окружность c_0 неподвижна). Сколько оборотов делает космонавт относительно окружности c_0 за то время, когда центр окружности c_1 делает один полный оборот?

17. Вне параллелограмма $ABCD$ взята точка M, такая, что $\angle MBC = \angle CDM$. Доказать, что $\angle CMB = \angle DMA$.

18. Пусть D — центр стороны AB треугольника ABC. Точка E такая, что $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$ и $\angle CDA = \angle BAE$. Найти величину угла BAC.

19. На плоскости дан треугольник ABC и точки P, O, R, которые удовлетворяют условиям:
    (1) P находится внутри треугольника ABC;
    (2) R находится на прямой BC;
    (3) Q и R находятся по разные стороны прямой AP;
    (4) $BQ \parallel AC$ и $PQ \parallel AB$;
    (5) $\angle PAC = \angle PRO$.

    Доказать, что описанные окружности треугольников ABC и PQR касаются друг друга.

20. На плоскости дана окружность k с центром O. Вне окружности k выбирается точка S и через нее проводятся прямые a и b, которые пересекают окружность k соответственно в точках A, A' и B, B'. Найти геометрическое место точек, которые образуются при пересечении окружностей , образованных точками S, A', B и S, A, B' (не считая точки S).