Treeningvõistlus "Balti tee '97" võistkonnale

Tartus, 24. oktoobril 1997

1. Olgu n selline positiivne täisarv, et $5^n + 3^n + 1$ on algarv. Tõesta, et n jagub arvuga 12.

2. Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused on täisarvud ja selle pindala on arvuliselt võrdne ümbermõõduga. Leia selle kolmnurga külgede pikkused.

3. Leia kõik algarvude nelikud (p_1, p_2, p_3, p_4), mis rahuldavad järgmisi tingimusi:
   (i) $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$;
   (ii) $p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_4 + p_4p_1 = 882$.

4. Milliste positiivsete täisarvude n korral leidub arvude $1, 2, \ldots, n$ selline ümberjärjestus $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et $|a_k - k| = |a_1 - 1| \neq 0$ iga $k = 2, 3, \ldots, n$ korral?

5. On antud täisarvud, mille summa on 1492. Kas nende arvude seitsmendate astmete summa võib olla: a) 1996; b) 1998? (Vaadeldavad arvud ei tarvitse olla kõik erinevad.)

6. Kaks paralleelset sirget puutuvad ringjoont keskpunktiga O. Kolmas sirge, mis samuti on selle ringjoone puutujaks, lõikab kaht esimest vastavalt punktides A ja B. Tõesta, et $\angle AOB = 90°$.

7. Ruudu $ABCD$ külgedel AB, BC, CD ja DA võetakse vastavalt punktid K, L, M ja N nii, et $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MD|} = \frac{|DN|}{|NA|} = n$. Leia ruutude $KLMN$ ja $ABCD$ pindalade suhe.

8. Kumeras viisnurgas $ABCDE$ on iga diagonaal paralleelne mingi küljega ning $|AB| = |BC| = |CD|$. Tõesta, et see viisnurk on korrapärane.

9. Kolmnurga ABC külgedele AB, BC ja CA kolmnurgast väljapoole konstrueeritakse vastavalt ristkülikud ABB_1A_2, BCC_1B_2 ja CAA_1C_2. Tõesta, et lõikude A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 keskristsirged lõikuvad ühes punktis.

10. Punktihulka S võib samm-sammult täiendada, lisades sellesse igal sammul hulga S mistahes punkti peegelduse mingi teise hulka S kuuluva punkti suhtes.

    Koosnegu hulk S esialgu mingi kuubi seitsmest tipust. Kas lõpliku arvu kirjeldatud sammude abil on võimalik hulka S lisada selle kuubi kaheksas tipp?

11. Milliste parameetri a väärtuste korral on ruutvõrranditel $19x^2+ax+97=0$ ja $97x^2+ax+19=0$ ühine lahend?

12. Kas leiduvad positiivsed täisarvud m ja n, mille korral arvud m^2+n ja n^2+m on mõlemad täisarvude ruudud?

13. Tõesta, et mistahes täisarvu $n \geqslant 1$ korral kehtib võrratus $(n+1)^n \geqslant 2^n \cdot n!$. Milliste n väärtuste korral kehtib võrdus?

14. Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivsete täisarvude kolmikuid (x, y, z), mis rahuldavad võrrandit $x^2+y^2+z^2=3xyz$.

15. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille jaoks leidub niisugune reaalarvuliste kordajatega polünoom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (kus $a_n \neq 0$) ja n erinevat täisarvu $k_1, k_2, \ldots, k_n$, nii et $p(0) = 0$ ning $p(k_i) = n$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral.

16. Leia 1 000 000. number lõpmatus numbrijadas

$$1234567891011121314\ldots979899100101102103\ldots,$$

mis saadakse kõikide positiivsete täisarvude kirjutamisel kasvavas järjekorras üksteise järele.

17. Positiivsete täisarvude $1, 2, \ldots, 1997$ hulgast valitakse välja mingid 1001 arvu. Tõesta, et valitud arvude seas leiduvad kaks, mis erinevad üksteisest täpselt 4 võrra.

18. Pargis kasvab 10000 puud, mis paiknevad 100 reast ja 100 veerust koosneva ruudustiku tippudes. Maksimaalselt kui palju puid on võimalik maha raiuda nii, et ühegi kännu otsas istudes ei oleks näha ühtegi teist kändu?

19. Ringis läbimõõduga 5 cm valitakse suvaliselt 10 punkti. Tõesta, et leiduvad kaks valitud punkti, mille vahekaugus on väiksem kui 2 cm.

20. Tasandil on antud 10 punkti nii, et mistahes viie antud punkti hulgas leiduvad neli, mis paiknevad ühel ringjoonel. Tõesta, et:
    a) leiduvad 5 antud punkti, mis paiknevad ühel ringjoonel;
    b) leiduvad 9 antud punkti, mis paiknevad ühel ringjoonel.