Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути ’97”

Тарту, 24 октября 1997 г.

1. Пусть n — положительное целое число, при котором число $5^n + 3^n + 1$ является простым. Доказать, что n делится на 12.

2. Длины катетов прямоугольного треугольника являются целыми числами и площадь треугольника численно равняется его периметру. Найти длины сторон этого треугольника.

3. Найти все четверки простых чисел (p_1, p_2, p_3, p_4), удовлетворяющие следующим условиям:
   (i) $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$;
   (ii) $p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_4 + p_4p_1 = 882$.

4. При каких положительных целых n найдется такая перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, чтобы $|a_k - k| = |a_1 - 1| \neq 0$ при каждом $k = 2, 3, \ldots, n$?

5. Даны целые числа, сумма которых равна 1492. Может ли сумма седьмых степеней этих чисел равняться: а) 1996; б) 1998? (Рассматриваемые числа не обязательно все различны.)

6. Две параллельные прямые касаются окружности с центром O. Третья прямая, также касающаяся этой окружности, пересекает двух первых соответственно в точках A и B. Доказать, что $\angle AOB = 90^\circ$.

7. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ выбирают соответственно точки K, L, M и N так, чтобы $\dfrac{|AK|}{|KB|} = \dfrac{|BL|}{|LC|} = \dfrac{|CM|}{|MD|} = \dfrac{|DN|}{|NA|} = n$. Найти отношение площадей квадратов $KLMN$ и $ABCD$.

8. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ параллельна некоторой его стороне и $|AB| = |BC| = |CD|$. Доказать, что этот пятиугольник является правильным.

9. К сторонам AB, BC и CA треугольника ABC вне треугольника построят прямоугольники ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2 соответственно. Доказать, что срединные перпендикуляры отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

10. Множество точек S можно постепенно дополнять, добавляя к нему на каждом шагу отражение любой точки из множества S относительно некоторой другой точки, принадлежащей множеству S.

Пусть множество S изначально состоит из семи вершин некоторого куба. Можно ли конечным числом описанных шагов добавить в множество S восьмую вершину этого куба?

11. При каких значениях параметра a квадратные уравнения $19x^2+ax+97=0$ и $97x^2+ax+19=0$ имеют общее решение?

12. Найдутся ли положительные целые числа m и n, при которых каждый из чисел m^2+n и n^2+m является квадратом целого числа?

13. Доказать, что при любом целом числе $n \geqslant 1$ выполняется неравенство $(n+1)^n \geqslant 2^n \cdot n!$. При каких значениях n имеет место равенство?

14. Доказать, что имеется бесконечно много троек положительных целых чисел (x, y, z), удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2+z^2=3xyz$.

15. Найти все положительные целые числа n, для которых существуют многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с вещественными коэффициентами (где $a_n \neq 0$) и n различных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ такие, что $p(0)=0$ и $p(k_i)=n$ при каждом $i=1,2,\ldots,n$.

16. Определить 1 000 000. цифру в бесконечной последовательности цифр

$$1234567891011121314\ldots979899100101102103\ldots,$$

полученной при написании всех положительных целых чисел один за другим в возрастающем порядке.

17. Из положительных целых чисел 1, 2, ..., 1997 выбирают некоторые 1001 чисел. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся двое, различающиеся друг от друга ровно на 4.

18. В парке растут 10000 деревьев, расположенные в узлах квадратной сетки из 100 строк и 100 столбцов. Какое максимальное число деревьев можно срубить так, чтобы сидящий на любом пне не видел бы ни одного другого пня?

19. В круге диаметра 5 см произвольным образом выбирают 10 точек. Доказать, что найдутся две выбранные точки, расстояние между которыми меньше 2 см.

20. На плоскости даны 10 точек, причем среди любых пяти данных точек найдутся четверо, расположенные на одной окружности. Доказать, что:
    а) найдутся 5 данных точек, расположенные на одной окружности;
    б) найдутся 9 данных точек, расположенные на одной окружности.