Proovivõistlus “Balti tee ’96” Eesti võistkonnale

Tartus, 25. oktoobril 1996

1. Leia vähim positiivne täisarv, mis jagub arvuga 49 ja koosneb ainult ühesugustest numbritest.

2. Koostame kolmnurkse arvutabeli, milles iga arv on võrdne eelmises reas tema kohal asuva arvu ning selle vasak- ja parempoolse naabri summaga (puuduvad arvud loeme võrdseteks nulliga, vt. joonist). Tõesta, et selle tabeli 1996. reas leidub vähemalt üks paarisarv.

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1

3. Tõesta, et võrrandil $14x^2 + 15y^2 = 7^{1996}$ ei ole positiivseid täisarvulisi lahendeid.

4. Tähistagu $P(n)$ täisarvu $n > 1$ kõikide positiivsete täisarvuliste jagajate korrutist (1 ja n kaasa arvatud). Leia vähim n väärtus, mille korral $P(n) = n^{10}$.

5. Asendame iga märgi $\pm$ märgiga $+$ või $-$ nii, et saame tõese võrduse:

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 96 = 1996 .$$

   Milline on seejuures märkide $+$ vähim võimalik arv?

6. On teada, et x , y ja z on ühisteguriteta positiivsed täisarvud (s.t. $\text{SÜT}(x, y, z) = 1$) ning $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$. Tõesta, et arvud $x + y$, $x - z$ ja $y - z$ on mingite täisarvude ruudud.

7. Reaalarvude a, b, x, y korral kehtivad võrdused:

$$\begin{aligned} a + b &= 23 , \\ ax + by &= 79 , \\ ax^2 + by^2 &= 217 , \\ ax^3 + by^3 &= 691 . \end{aligned}$$

Leia avaldise $ax^4 + by^4$ väärtus.

8. Leia reaalarvude jadad $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ ja $\{d_n\}$, nii et iga täisarvu $n > 1$ korral oleksid funktsioonil

$$f_n(x) = a_n + b_n x + c_n |x - d_n|$$

järgmised omadused:

$$f_n(k) = k + 1\ , \quad \text{kui} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\ ; \qquad f_n(n) = 1\ .$$

9. Täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ rahuldab tingimust $P(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 0$. Leia kõik niisugused polünoomid $P(x)$.

10. Leia $f(3)$, kui funktsioon $f(x)$ rahuldab kõikide reaalarvuliste x väärtuste korral tingimust

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2x + 29}{x - 2}\right) = 100x + 80\ .$$

11. Nimetame *bumerangiks* nelinurka, mille üks sisenurk on suurem kui $180°$. Kas on võimalik teatud arvust bumerangidest kokku panna mingi kumer hulknurk?

12. Ringjoonel võetakse punktid A, P, Q, R, S (selles järjekorras), kusjuures

$$\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS\ .$$

Tõesta, et $|AR| \cdot (|AP| + |AR|) = |AQ| \cdot (|AQ| + |AS|)$.

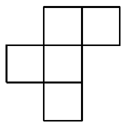
13. Tasand lõikab ruudukujulise põhjaga korrapärase püramiidi külgservi AH , BH , CH ja DH nii, et lõikepunktide kaugused püramiidi tipust H on vastavalt a , b , c ja d . Tõesta, et $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$.

14. Kaks ringjoont, mis ei asu ühel tasandil, puutuvad teineteist punktis P ja neil on punktis P ühine puutuja. Tõesta, et need ringjooned asuvad mingi ühise sfääri pinnal.

15. Olgu T' kolmnurk, mille küljepikkusteks on kolmnurga T kõrguste pikkused, ning T'' kolmnurk, mille küljepikkusteks on kolmnurga T' kõrguste pikkused. Leia kolmnurga T pindala, kui kolmnurkade T' ja T'' pindalad on vastavalt 30 ja 20 .

16. Olgu S hulga $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ selline alamhulk, mille mistahes kahe alamhulga elementide summad on erinevad. Leia alamhulga S elementide summa suurim võimalik väärtus.

17. Kas joonisel näidatud kujunditega on võimalik katta kogu tasand (kujundit võib pöörata, aga mitte peegeldada)?



18. Kas kuup suurusega $1997 \times 1997 \times 1997$ on võimalik tervenisti täita kuupidega suurusega $2 \times 2 \times 2$ ja $3 \times 3 \times 3$?

19. Rahvusvahelisel suurfirmal on 250 töötajat, kellest igaüks oskab vähemalt kaht keelt. Seejuures mistahes töötajate A ja B korral leidub nii selline keel, mida A valdab ja B ei valda, kui ka selline keel, mida B valdab ja A ei valda. Leia keelte, mida valdab vähemalt üks selle firma töötajatest, vähim võimalik koguarv.

20. Lõpmatu malelaud on sirgjoonega jaotatud kaheks osaks, nii et malelaua iga ruut asub sellest all- või ülalpool. Algul on malelaual n nuppu, mis kõik paiknevad erinevatel ruutudel eraldusjoonest allpool. Igal käigul tõstetakse üks nupp horisontaal- või vertikaalsuunas üle tema naaberruudul asuva nupu vabale ruudule ning nupp, millest "üle hüpati", eemaldatakse laualt. Leia vähim n väärtus, mille korral võib $n-1$ käigu järel ainsana lauale jääv nupp paikneda neljandas reas ülalpool eraldusjoont.