Treeningvõistlus “Balti tee ’95” võistkonnale

Tartus, 27. oktoobril 1995

1. Olgu $\overline{a_1a_2a_3}$ ja $\overline{a_3a_2a_1}$ kolmekohalised kümnendsüsteemis arvud, kusjuures a_1, a_3 on erinevad numbrid, millest kumbki pole null. Nende arvude ruudud on vastavalt viiekohalised arvud $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ ja $\overline{b_5b_4b_3b_2b_1}$. Leia kõik sellised kolmekohalised arvud.

2. Kas leiduvad sellised positiivsed täisarvud $a > b > 1$, et iga positiivse täisarvu k jaoks leidub positiivne täisarv n, nii et $an + b$ on mingi positiivse täisarvu k. aste?

3. Nimetame naturaalarvu “huvitavaks”, kui see on kahe (mitte tingimata erineva) algarvu korrutis. Kui mitu järjestikust naturaalarvu (maksimaalselt) võivad kõik olla “huvitavad”?

4. Leia kõik täisarvud n, mille korral
$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$
on täisarv.

5. Tõesta, et arv $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ jagub arvuga 2^9 iga paaritu naturaalarvu n korral.

6. Olgu kaks funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$ defineeritud iga $2 < x < 4$ korral ning olgu selliste x väärtuste korral rahuldatud tingimused $2 < f(x) < 4$, $2 < g(x) < 4$, $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ ja $f(x) \cdot g(x) = x^2$. Tõesta, et $f(3) = g(3)$.

7. Leia järgmise võrrandisüsteemi täisarvulised lahendid:
$$\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 4^x \\ x + y + z = 20\,. \end{cases}$$

8. Leia kõigi selliste positiivsete täisarvude summa, mille numbrid moodustavad kas rangelt kasvava või rangelt kahaneva jada.

9. Lahenda võrrandisüsteem
$$\begin{cases} x^5 = y + y^5 \\ y^5 = z + z^5 \\ z^5 = t + t^5 \\ t^5 = x + x^5\,. \end{cases}$$

10. Olgu $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$ kaks lõplikku jada, mis koosnevad kokku $2n$ erinevast reaalarvust. Järjestades kummagi jada elemendid kasvavas järjekorras, saame uued jadad $a'_1, \ldots, a'_n$ ja $b'_1, \ldots, b'_n$. Tõesta, et
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i - b_i| \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a'_i - b'_i|\,.$$

11. Võrdkülgne kolmnurk on jaotatud n^2 kongruentseks võrdkülgseks kolmnurgaks. Ühes nende kolmnurkade tippudest asub ämblik, mingis teises aga kärbes. Kordamööda saab kumbki neist liikuda suvalisse naabertippu. Tõesta, et ämblikul on igal juhul võimalik kärbes kinni püüda.

12. Kuningriigis on 13 linna. Mõnede linnapaaride vahel on kahesuunalised vahepeatusteta bussi-, rongi- ja/või lennuliinid. Milline on vähim võimalik liinide koguarv, kui igast linnast on võimalik sõita igasse teise linna, kasutades seejuures mistahes kaht transpordiliiki ja mitte kasutades kolmandat?

13. Võrdkülgne kolmnurk ABC on jaotatud 100 kongruentseks võrdkülgseks kolmnurgaks. Kui mitu väikeste kolmnurkade tippu on maksimaalselt on võimalik välja valida, nii et ükski paar valitud tippudest ei asuks kolmnurga ABC mõne küljega paralleelsel sirgel?

14. Ruut on jaotatud 16 võrdseks ruuduks, mille tipud määravad tasandil 25 erinevat punkti. Kui mitu neist punktidest tuleb minimaalselt eemaldada, et ükski nelik allesjäänud punktidest ei asuks mõne ruudu tippudes, mille küljed on parallelsed esialgse ruudu külgedega?

15. Kahe kuubikujulise täringu igale tahule kirjutatakse mingi positiivne täisarv. Neid täringuid veeretatakse ja seejärel leitakse nende ülemistel tahkudel olevate arvude summa. Kas on võimalik kirjutada arvud täringute tahkudele nii, et võimalikud summad oleksid 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ja 13 ning kõik need summad esineksid võrdse tõenäosusega?

16. Kaks ringjoont, mõlemad raadiusega r, paiknevad tasandil teineteist lõikamata. Üks sellel tasandil asuv sirge lõikab esimest ringjoont punktides A, B ja teist ringjoont punktides C, D nii, et $|AB| = |BC| = |CD| = 14\text{cm}$. Teine sirge lõikab neid ringjooni vastavalt punktides E, F ja G, H nii, et $|EF| = |FG| = |GH| = 6\text{cm}$. Leia raadius r.

17. Tasandil asetsevad kolm paarikaupa mitteparalleelset sirget. Kolm punkti liiguvad mööda neid sirgeid erinevate konstantsete kiirustega (üks punkt igal sirgel), kusjuures see liikumine on kestnud lõpmata kaua ja jätkub lõpmata kaua tulevikus. Kas on võimalik määrata need kolm sirget ning kolme punkti kiirused ja asukohad "nullhetkel" nii, et need punktid ühelgi ajahetkel minevikus, olevikus ega tulevikus ei paikneks ühel sirgel?

18. Kolmnurgas ABC on $|AB| = 15$, $|BC| = 12$, $|AC| = 13$. Selle kolmnurga mediaan AM ja nurgapoolitaja BK lõikuvad punktis O (seejuures $M \in BC$, $K \in AC$). Olgu $OL \perp AB$, kus $L \in AB$. Tõesta, et $\angle OLK = \angle OLM$.

19. Olgu O kumera nelinurga $ABCD$ ümberringjoone keskpunkt. Nurgad $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ ja $\angle DOA$ (mingis järjekorras võetuna) on sama suured kui nelinurga $ABCD$ nurgad. Tõesta, et $ABCD$ on ruut.

20. Olgu Q ühikkuup. Nimetame tetraeedrit "ilusaks", kui kõik selle servad on võrdse pikkusega ja kõik selle tipud asuvad kuubi Q pinnal. Leia "ilusa" tetraeedri ruumala kõik võimalikud väärtused.